量子场论导论

何宝鹏　熊钰庆　编著



华南理工大学出版社

量子场论导论

何宝鹏　熊钰庆　编著



华南理工大学出版社

内 容 提 要

量子场论是研究基本粒子的理论，是理论物理最活跃的前沿学科之一。

本书是作者根据多年来讲授量子场论课程的教学实践编写而成的。内容包括：相对论波动方程、经典场论、、标量场、旋量场和矢量场量子化、Green 函数、量子场的相互作用、散射矩阵和协变微扰论及其应用、重整化理论及规范场等。

本书可作为高等学校物理专业高年级学生和研究生的教科书，亦可供教师和理论物理工作者参考。

量子场论导论

何宝鹏 熊钰庆 编著

*

华南理工大学出版社出版发行

（广州 五山）

各地新华书店经销

新达高科技公司电脑排版

暨南大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 287千

1990 年 11 月第 1 版 1990 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—1 000

ISBN 7—5623—0226—X/O·22

定价：5.50元

前　言

量子场论是研究基本粒子的理论，它始于本世纪二十年代，近年又有许多新的发展，并广泛应用于其它学科和领域，是理论物理最活跃的前沿学科之一。由于量子场论的深度、难度以及它的迅速发展，使得刚学习这一课程的学生和读者遇到不少困难。

作者多年来为华南师范大学物理系高年级学生和研究生讲授量子场论课程。本书是根据作者所编写的讲义经过修改补充而成，旨在提供一本内容较全面又通俗易懂的入门书。

为了使读者对量子场论有较全面的了解，本书特别编入了重整化和规范场的内容。书中全部数学推导都尽可能作到详尽，或指出推导步骤，或通过附录说明。注意章节间的承前启后，内在联系以及所得结果的物理意义的释注，并且做到内容上基本自足，使学过量子力学和电动力学的读者通过学习本书可掌握量子场论的基本知识，为在这一领域的进一步研究打下坚实的基础。

本书由一本讲义逐步扩充成为现在这样正式出版的教科书，这与华南师范大学物理系给予作者良好的工作条件是分不开的，也与历届系领导，理论物理教研室以及学习本书的学生的关怀与热情支持分不开。在此，作者对他们致以衷心的感谢，特别怀念已故原物理系主任何新发教授早期为这门课程的建设和对作者的指导。

由于这门学科发展迅速，内容丰富，作者水平有限，错漏和不足在所难免，望广大读者、同行专家对本书提出宝贵的意见，作者无限感谢。

作　者

1990 年 5 月　于广州

目　录

第一章　绪　论

§1.1　物理理论的发展和量子场论的建立

人类对物质世界的研究和认识是由低速现象到高速现象，由宏观领域到微观领域，并且将这些研究成果总结成在该范围内适用的物理理论。首先对低速、宏观物理现象的研究总结出古典的物理理论（如古典力学、热力学等），这一工作在十九世纪以前就已完成。进而对高速、宏观物理现象的研究总结出相对论性古典理论（如古典电磁场理论和相对论等），这一工作也已于十九世纪和二十世纪初完成。随着实验技术的发展和理论研究的深入，研究工作深入到微观领域，人们发现微观世界的物质运动具有新的特性——波、粒二象性。对低速、微观物理现象的研究导致非相对论量子力学的诞生。这一工作以 1925 年非相对论薛定格(Schrödinger)方程的建立而基本完成。二十世纪三十年代以后，实验发现了一系列新的基本粒子和它们之间的相互转化现象，这是属于高速、微观物理现象。以往的非相对论量子力学和相对性古典理论都不能对这些现象进行解释。

非相对论量子力学和古典物理理论是在一定范围内总结出来也只能用来解决一定范围的物理现象，因此具有一定局限性。

非相对论量子力学只在低速微观范围内适用，自由粒子的 Schrödinger 方程如下（自然单位制）：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$$

其中 $$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \qquad \mathbf{P} = -\mathrm{i}\nabla$$

上式的能量算符是从古典力学继承而来（自由粒子的能量就是它的动能），而描述高速物理现象的相对论能量应为

$$E^2 = \mathbf{P}^2 + m^2$$

另外，在粒子的速度接近光速的情况下，粒子的动能可能远大于它的静能，因此在相互作用过程中能量转换可能很大，而在满足质能关系定律下导致粒子的产生和消失，宇宙射线中电子簇射和介子簇射就是例子。但描述多粒子运动的 Schrödinger 方程，只能描述有固定粒子数目的状态，因而不能处理粒子的产生、消失和转化问题。总之，量子力学不能用于高速物理现象。

同样，相对论性古典物理虽然能反映高速物理现象，但不能描述微观现象中波、粒二象性。例如相对论质点力学虽然能反映客体的粒子性，但不能反映客体的波动性；而相对论性古典电磁场理论（Maxwell 理论）能够反映客体的波动性，但不能反映客体的粒子性。

由于以往的理论都不能解释高速微观现象领域里所出现的实验事实，促使人们探求新的理论，这个新的理论必须既能反映微观现象的波、粒二象性，又具有能反映高速现象特点的罗仑兹不变性，这就导致量子场论的建立。

量子场论的建立是从电磁场的量子化开始的。因为人们最先研究的高速微观现象是关于光子的现象，光子是电磁场的量子，只能以光速运动，有关光子的现象就是高速现象，而且光子的静止质量为零，即使在很小的能量转换过程中，光子也能产生和消失。麦克斯韦(Maxwell)的电磁理论本来就满足特殊相对论的要求，能描述高速现象，因此我们有理由期望将电磁场理论量子化，从而得到一个既能反映波动性，又能反映粒子性，描述高速微观现象的理论。

狄拉克(Dirac)在 1927 年首先将电磁场量子化，其方法如下：把电磁场的运动分解为一系列的基本振动，每个基本振动代表一

个自由度，而每个基本振动系统的能量 E 只能是一系列不连续的数值。即

$$E=(n+\frac{1}{2})\omega \qquad n=0,1,2\cdots\cdots$$

电磁场的量子化就是将电磁场各个基本振动量子化，量子化后的能量也取如上式所给的不连续的数值，这就解释了电磁场的不连续性（粒子性）和光子的存在。同时某一振动自由度激发至 $n=1$ 的受激状态就相应于产生了一个频率为 ω 的光子，某一自由度处于 n 的激发态，就相应于存在 n 个频率为 ω 的光子，振动激发的消失，相应于光子的消失。因此量子化后的电磁场理论不仅能解释光子的存在，而且为处理光子的产生和消失开辟了道路。

Driac 在 1928 年提出了描述单个高速电子运动的相对论波动方程（以后称为 Driac 方程），随后人们仿照电磁场的量子化方法提出了电子场的概念，并将电子场量子化。电子场的激发相应于电子的产生，电子场激发的消失相应于电子的消失。而首先提出电子场量子化方法的是约旦和维格纳（Jordan and Wigner 1928）。海森堡和泡里（Heisenberg and Pauli 1929）进一步研究了电子场和电磁场之间相互作用的量子理论——量子电动力学，并建立了量子场论的比较普遍的数学形式。

1930 年以后，实验相继发现了正电子、中子、中微子、μ 介子、π 介子、K 介子、Λ 超子、Σ 超子、Ξ 超子……以及它们之间的相互转化现象。人们对各种不同的基本粒子引进相应的量子场的概念，并用各种场之间的相互作用来处理各种基本粒子之间的相互作用和相互转化问题。目前为止用这种方法处理基本粒子现象取得比较重要成就的是量子电动力学和 β 衰变现象，至于其它基本粒子现象，实验积累的资料不多，而且理论上也存在不少困难，因此量子场论还不是一个完备的理论，只是未来完备的基本粒子理论的前驱，正象量子论是量子力学的前驱一样。

量子场论存在的基本困难是“发散困难”，这一困难是当用微扰论计算任何电磁相互作用时，第一级近似计算的结果常常和实

验结果相符合，但进一步作高级近似计算的结果总是无穷大，而没有实际意义。这种发散困难在古典电子论中同样存在（电子自能的无穷大)，但量子场论中发散困难的种类还有所增加（例如真空极化的高级近似也是发散的)，其它量子场理论，如 β 衰变理论，介子、核子和超子场的理论等也遇到同样的基本困难。朝永振一郎 (Tomonaga 1946) 许温格 (Schwinger 1948) 和费曼 (Feynman 1949) 曾提出克服发散困难的"重整化方法"，成功地解释了某些电磁现象中极为精细的效应，例如电子的反常磁矩，氢原子 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2P_{\frac{1}{2}}$ 能级的微小差异 (Lamb 移动)。"重整化方法"使量子场论跨进了一大步，但并不是彻底克服这一困难而只是绕过这一困难，很可能是将困难向后推迟一步，因为重整化以后尽管每一级的计算是收敛的，但整个级数仍旧很可能是发散的。

量子场论还存在另一个严重的技术上的困难，就是用微扰论方法处理弱相互作用（相互作用强度数量级为 $10^{-6}-10^{-5}$）和电磁相互作用（相互作用强度数量级为 10^{-2}）时可以得到很好的近似结果，但是对强相互作用(相互作用强度数量级为1－15)就只能得到很坏的近似或根本不能用微扰论方法计算。人们努力探索处理强相互作用的普遍有效方法，例如本世纪五十年代盖尔曼等人 (Gell－Mann, Goldberger & Thirring 1954) 及波戈留波夫 (Боголюбов 1957) 的"色散关系"以及从六十年代开始至现在所发展的量子色动力学 (QCD) 都是企图寻求描述强相互作用的理论。

1954年杨振宁和米尔斯提出普遍的规范对称性的数学理论，这是一个以定域规范不变性为基础的场论，即所谓规范场论。这理论认为：具有某种整体对称性的物理定律，当把它推广到对定域对称变换下保持不变时，就必须引入新的场——规范场。这一理论体系在六十年代后期关于对称性真空破缺机制提出后得到重要的应用，使量子场论得到新的发展。比如认为夸克通过它的味和味规范场（光子场和中间玻色子场）发生电磁作用和弱作用的动力学理论——量子味动力学 (QFD)，在弱、电统一理论方面已取得了初步的成功，理论预言的规范粒子 $W^{\pm}$ 和 Z^{0} 已于1983年被实验发

现和证实。量子色动力学(QCD)是描述强相互作用的规范场论，认为夸克通过它的色自由度和色规范场（胶子场）发生强作用。这个理论的某些预言也得到实验支持。1974年威尔逊（Wilson）提出格点规范场论，这个理论能对强耦合进行有效的计算，提供了对夸克禁闭的说明。总之，六十年代以后量子场论有许多新的发展，但仍然不能认为是一个圆满的理论，还存在很多困难，而这些困难的克服将与物理思想和概念的重大突破相联系。

§1.2　组成物质的基本粒子

基本粒子一般指构成物质的基本单元，即没有结构的几何点，是一个理想的物理模型。基本粒子物理学是物理学的前沿，是目前国际上最活跃的学科之一，而"量子场论"是研究基本粒子的主要理论之一。基本粒子以个别或集体的方式相互作用，相互约制，相互转化，从而形成宇宙间形形色色的物质，发生千变万化的物理现象，对物质结构物理规律的追根求源的研究，把人们引向微观世界，并且层层深入下去。

基本粒子这一术语中的"基本"两字的含义是相对的，是随着人们对物质结构认识的发展而发展。当人们对微观世界的认识进入更深的层次时，有些原来认为是"基本"的粒子就可能不再是"基本"的了，而是有结构的粒子。例如：以前把质子、中子认为是基本粒子，随着高能物理实验的发展和理论研究的深入，现在人们已倾向于认为它们都是由"夸克"组成的有结构的粒子了(重子具有不均匀结构的观念已为核子的电荷集中在类点状组分上而不是均匀分布的实验所证实，这种点状结构称为部分子，部分子是否真实客体，以及与夸克有何关系，还在探索之中。最近，美国弗里德曼等人已证实夸克的存在)。此外，物质是否无限可分，是否存在一个物质结构的最小单元，从目前高能物理实验来看，要作出结论还为时过早。基于上述种种原因，在现行的文献和著作中常用"粒子"代替"基本粒子"一词，并把"基本粒子物理学"改

称为“粒子物理学”。

到目前为止，人们已经发现的粒子超过七百种（含共振态粒子，有些尚待确认).按照相互作用的性质，可分成三类：

(1) **规范粒子** 这是传递相互作用的粒子，已被发现和确认的有下面四种：

光子 (γ) 传递电磁相互相作用，自旋 J=1，静质量 $m_\gamma=0$，光的量子理论是 Einstein 在1905年首先提出，并被光电效应和康普顿散射实验所证实的。

中间玻色子 ($W^\pm$, Z^0) 传递弱相互作用，自旋 J=1，静质量 $m_{W^\pm}=80.8\text{GeV}/c^2$, $m_{Z^0}=92.9\text{GeV}/c^2$, * $W^\pm$和 Z^0粒子于1983年1月和6月在西欧中心相继被发现。

此外，传递强作用的胶子 (g)（自旋为 J=1，静质量 $m_g=0$，不带电）和传送引力作用的引力子（自旋 J=2）仍有待实验证实。

(2) **轻子** 参与弱作用和电磁作用（中微子只参与弱作用）的粒子。

电子 e^- 自旋 $J=1/2$, $m_e=0.51\text{MeV}$, 1897年汤姆逊 (J. J. Thomson) 测定阴极射线粒子荷质比时发现，是最早发现的基本粒子。

正电子 e^+ 是电子的反粒子，1932年安德逊 (Andesson) 在宇宙射线中发现。

μ^+, μ^- J=1/2, $m=106\text{MeV}$, 1935年在宇宙射线中发现。

ν, $\bar{\nu}$ J=1/2，静止质量为零，1933年泡里 (Pauli) 研究 β 衰变时预言其存在，1953年从实验上发现。

τ^+, τ^- $m=1807\text{MeV}$, 1977年在 SLAC 用 e^+e^-交叉储存环，进行 e^+e^-对撞实验，发现轻子 τ 存在。

1962年发现 ν 有 ν_e, ν_μ 之别，很可能 τ 类轻子亦有自已的中微

---

* $1\text{MeV}/c^2=1.78267\times10^{-30}\text{kg}$。

子 ν_τ 。

现在已被发现并被确认的轻子共十二种（含反粒子），分成三类：

e类	粒子	e^-	e^+	ν_e	$\tilde{\nu}_e$
	轻子数 L_e	1	-1	1	-1
μ类	粒子	μ^-	μ^+	ν_μ	$\tilde{\nu}_\mu$
	轻子数 L_μ	1	-1	1	-1
τ类	粒子	τ^-	τ^+	ν_τ	$\tilde{\nu}_\tau$
	轻子数 L_τ	1	-1	1	-1

（3）**强子**　参与强作用，在已发现的粒子中，除去规范粒子和轻子，其余都是强子。强子又分为重子（自旋为$\frac{1}{2}$的整数倍）和介子（自旋为零或整数）。人们发现，强子的性质满足经验公式

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \qquad Y = B + S$$

其 Q 是粒子的电荷，I_3和 Y 分别为粒子的同位旋第三分量和超荷（超荷等于重子数 B 和奇异数 S 的代数和）。

基于对实验资料的分析，盖尔曼（Gell－Mann）于1962年提出强子结构的夸克（quark）模型，认为quark有三种，是自旋为1/2的费米子。

	Q	I_3	S	B	Y
上夸克 u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
下夸克 d	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
奇夸克 s	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

并认为介子是由夸克和反夸克组成（$q\ \tilde{q}$），重子是由三个夸克组成（$q\ q\ q$）。这个模型成功地预言了 Ω^-粒子的存在，$\Omega^-=(S\ S\ S)$自旋 $J=\frac{3}{2}$　$Q=-1$　$S=-3$　$I=0$。1964年实验证实了这个粒子的确存在。

（4）**新粒子**　J/ψ 粒子（3095）是1974年由丁肇中（BNL）和 Richter（SLAC）先后发现的，由于质量大宽度小，用原有理论难于解释，有人便提出应存在第四种夸克——粲夸克（c）

	Q	I_3	S	C（Charm 量子数）
C	$\frac{2}{3}$	0	0	1
$\overline{C}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	-1

（u，d，s 夸克的粲数 $C=0$）

以后10年还发现了 ψ'（3684MeV）ψ''（3772）ψ''（4030）等粒子。

Υ（9. 4GeV）　　Υ'（10. 0）　　Υ''（10. 4）

它们是由 e^+和 e^-对撞在1977—1978年先后发现的，它们的发现使人们相信可能有第五种底夸克b 存在，b 夸克和反夸克 $\bar{b}$ 构成 Υ 粒子。出于对称性考虑，人们预言存在第六种夸克，称为 t 夸克或顶夸克。1984年7月欧洲核子研究中心 UA—1实验组发现了顶夸克，质量为40GeV/c^2，下面给出另外三种夸克的性质。

	Q	I_3	S	B	Y
粲夸克 c	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
底夸克 b	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
顶夸克 t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

在已发现的七百余种粒子中，真正的稳定粒子（即未发现衰变行为的粒子）只有电子、质子、三种中微子及其反粒子和光子，共11种。但粒子物理学中有一个公认的约定，把凡是不能通过强作用衰变的粒子称为“稳定”粒子，否则称为不稳定粒子。附录 I 给出稳定粒子简表。

§1.3 自然单位 度规与记号

1. 自然单位

实验证实，在微观物质运动规律中存在着两个不变的常数 $\hbar$ 和 c，其中 $\hbar$ 是普朗克常数除以 2π，标志着量子效应，c 是光在真空中的传播速度，标志着相对论效应。还有可能存在着一个不变的基本长度 l。这三个常数的数值是采用人为制定的基本单位情况下出现的。如果我们采用一个单位制：取 c 为速度的单位，$\hbar$ 为作用量的单位，l 为长度的单位，即取 $c=\hbar=l=1$，那么这三个常数在微观物质运动的规律中应该不再出现。因此有理由称这种单位制为自然单位制。厘米、克、秒制与自然单位制的关系如下：

$$1\,\text{厘米}=\frac{1}{l}[l]$$

$$1\,\text{秒}=\frac{[l]}{l}\cdot\frac{1}{\frac{[c]}{c}}=\frac{c}{l}[c]^{-1}[l]$$

$$1\,\text{克}=\frac{cl}{\hbar}[\hbar][c]^{-1}[l]^{-1}$$

由此可知一个量纲为 $[\text{厘米}]^{\alpha}[\text{秒}]^{\beta}[\text{克}]^{\gamma}$ 的物理量与自然单位制的关系是：

$$[\text{厘米}]^{\alpha}[\text{秒}]^{\beta}[\text{克}]^{\gamma}=K^{-1}[\hbar]^{\gamma}[c]^{-(\beta+\gamma)}[l]^{\alpha+\beta-\gamma}$$

即 [厘米、克、秒单位制中物理量的数值]

$=K^{+1}$ [在自然单位制中物理量的数值]

其中：$K=\hbar^{\gamma}c^{-(\beta+\gamma)}l^{\alpha+\beta-\gamma}$

由于基本长度的存在尚未最后确定，在现代量子场论中为了

表述的方便和使场论各种公式更为简洁，常取下列的简化单位：
1）$\hbar=c=1$　　　$l=1$厘米
2）场之间的相互作用常数（如电荷）采用海氏（Heaviside）制。
这时，两种单位制间有如下互换关系：

$$1\text{ 厘米} = 1[\text{厘米}] = 1\text{ 自然单位}$$

$$1\text{ 秒} = c[\text{厘米}][c]^{-1} \simeq 3\times 10^{10}[\text{厘米}]\text{ 自然单位}$$

$$1\text{ 克} = \frac{c}{\hbar}[\text{厘米}]^{-1}[\hbar][c]^{-1} \simeq 3\times 10^{37}[\text{厘米}]^{-1}\text{ 自然单位}$$

电荷和$\hbar^{1/2}c^{1/2}$有相同的量纲，电子的电荷e在 CGS 制里为

$$|e| \simeq \sqrt{\frac{4\pi}{137}}\hbar^{1/2}c^{1/2}$$

在自然单位制里写成

$$\frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

采用上述单位制后，作用量$\hbar$和光速c在公式中就不再明显地出现了。同时在基本公式中也不再出现π。但当理论计算的公式用于观测验证时，仍需将自然单位制转换为普通单位制。本书采用自然单位制。

2. **度规**

度规标志空间的几何性质，对一个空间的矢量和长度的不同规定方式，对应不同的度规。在狭义相对论中，空间的三个自由度和一个时间自由度结合成一个统一的四维空间，称为闵可夫斯基空间（Minkowsky space）。对于这个空间中的矢量分量和长度，有各种不同的规定方式。对应于不同的度规对物理量的描述，常用的有下列两种度规

（1）*泡里度规*（Pauli metric）

泡里度规里协变量与逆变量没有区别，但物理量的描述受到虚数的牵累，D. Lurie 的专著“*Particles and Fields*”和本书（除第13章外）都采用这种度规。

度规张量 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$.

4—矢量分量

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ix_0) = (\boldsymbol{x}, it)$$

$$p_\mu = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_x, p_y, p_z, ip_0) = (\boldsymbol{p}, iE)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i\partial t}\right)$$

4—矢量长度

$$x^2 = x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \boldsymbol{x}^2 - t^2$$

$$p^2 = p_\mu p_\mu = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \boldsymbol{p}^2 - E^2$$

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu = (\nabla)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$$

γ 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_4 = \gamma_0 = \beta = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = -i\beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma} \\ i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) 布约肯—坠尔度规 (Bjorken—Drell metric)

在这种度规里，要区分逆变量和协变量，但不受虚数干扰。Bjorken 和 Drell 的“*Relativistic Quantum Fields*”等书采用这种度规。

度规张量

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

4一矢量分量

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \boldsymbol{x})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\boldsymbol{x})$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \boldsymbol{p})$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\boldsymbol{p})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{-\partial}{\partial x}, \frac{-\partial}{\partial y}, \frac{-\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$$

4一矢量长度

$$x^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - \boldsymbol{x}^2$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - \boldsymbol{p}^2$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial t})^2 - \nabla^2$$

γ 矩阵

$$\gamma^0 = \beta = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. 记号

本书采用以下记号和约定

四矢量

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_1, A_2, A_3, iA_0)$$

四矢量标积

$$A \cdot B = A_\mu B_\mu = \sum_\mu A_\mu B_\mu \qquad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

三矢量标积

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = \sum_i A_i B_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

体积元、积分

$$\int \mathrm{d}^3 x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \mathrm{d}v$$

$$\int \mathrm{d}^4 x = \int \mathrm{d}^3 x \int \mathrm{d}x_0 = \int \mathrm{d}v \mathrm{d}t$$

$$\int \mathrm{d}^4 k = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \int \mathrm{d}k_0$$

导数

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \frac{1}{i}\partial_0)$$

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu = (\partial_1^2, \partial_2^2, \partial_3^2, -\partial_0^2)$$

记号　　$\hat{A} = \gamma_\mu A_\mu$

矩阵迹　　Sp　　或　　Tr

梯度　　$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$

第二章　相对论波动方程

基本粒子现象是高速微观现象，要求描述基本粒子的运动方程满足相对论要求，电磁场方程具有相对论不变性，但非相对论量子力学中描述粒子运动的薛定格方程,则不满足相对论要求,这一章首先建立起相对论性波动方程，以后，把它们看成经典场并进行量子化，就能描述高速微观粒子现象。

§2.1　广义 Lorentz 变换

由于基本粒子的运动速度接近光速和时空的对称性，要求描述基本粒子的波动方程对下列坐标变换具有不变性。

(1) 由于空间和时间的均匀性，亦即在空间内无绝对的参考中心及在时间上无绝对的参考起点，这就导致时空坐标原点改动的不变性。

(2) 根据相对论的原理，运动方程对于单纯的罗仑兹变换保持不变，亦即对于作匀速运动的坐标变换保持不变。

(3) 由于空间的各向同性，亦即在空间中不存在任何特殊的方向，这就导致三维空间坐标的转动不变性。

(4) 由于选择右手坐标和左手坐标的任意性导致空间反射($x'=-x$，$t'=t$) 不变性。由于对过去和将来的对称性，导致时间反演 ($x'=x$，$t'=-t$) 的不变性。

上述第一种是位移变换，第二、三种是固有罗仑兹变换（四维空间转动变换)，第四种是空间反射和时间反演变换。它们是四种基本的广义罗仑兹变换（保证 $ds^2=dx_\mu dx_\mu$ 为不变量的变换统称为广义罗仑兹变换)。

古典力学、古典场论以及现代量子场论，根据特殊相对论原理和广泛的实验基础，要求在封闭系中所有场或基本粒子的准确的运动方程对上述一、二、三种连续 Lorentz 变换是协变的，这反映了自然规律的客观存在性和物质运动的可认识性，有深刻的内在哲理。

至于场的运动方程对不连续的罗仑兹变换的协变性，自从弱作用下宇称不守恒现象发现后，受到严重破坏，因此这个协变性已经不能成为量子场论中具有最普遍性的基本要求，但在强作用下，不连续的罗仑兹变换（包括空间反射，时间反演变换）的协变性仍然正确，可是在弱作用下，包括基本粒子衰变过程，实验证实基本粒子的运动规律，对空间反射变换不再具有协变性，而对时间反演，则仍具有协变性。

最广义的 Lorentz 变换是下列的非齐次 Lorentz 变换：

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu + b_\mu \qquad (2.1-1)$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 和 b_μ 是与时空坐标无关的常量(以后我们以希腊字母 $\mu\nu\cdots$ 表示由 1 至 4 的下标，用拉丁字母 i、j、k 表示由 1 至 3 的下标，而且采用爱因斯坦惯例，即一项中重复出现的下标表示取和)。因为广义罗仑兹变换要求 $ds^2 = dx_\mu dx_\mu =$ 恒量

即 $dx'_\mu dx'_\mu = dx_\mu dx_\mu$ (2.1-2)

由 (2.1-1) $\qquad dx'_\mu = a_{\mu\nu}dx_\nu$

所以 $\qquad dx'_\mu dx'_\mu = a_{\mu\nu}a_{\mu\rho}dx_\nu dx_\rho$

把上式与(2.1-2)比较有

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} \qquad (2.1-3)$$

其中 $\delta_{\nu\rho}$为 Kronecker符号。

令 a 代表变换矩阵，它的矩阵元素为 $a_{\mu\nu}$，令 $\tilde{a}$ 为 a 的转置矩阵，它的矩阵元素满足 $\tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$，则 (2.1-3) 可写成

$$\tilde{a}_{\nu\mu}a_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}$$

或 $$\tilde{a}\,a = I \qquad (2.1-4)$$

式中 I 为单位矩阵，令 $\det a$ 表示矩阵 a 的行列式的值，则根据行列

式的乘法定义，由(2.1－4)有 $\det(\tilde{a}\,a)=\det\tilde{a}\cdot\det a=\det I=1$，但 $\det\tilde{a}=\det a$，故有 $(\det a)^2=1$

所以
$$\det a=\pm 1 \qquad (2.1-5)$$

(1) 空间反射、时间反演变换

空间反射变换 $x_i'=-x_i \quad x_4'=x_4 \qquad i=1,2,3$

或
$$x_\mu'=\sigma_{\mu\nu}x_\nu$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1\end{pmatrix}$$

对这个变换
$$\det a=\det\sigma=-1$$

同理，对时间反演变换
$$x_i'=x_i,\ x_4'=-x_4,\ \det a=-1$$

(2) 四维空间的转动变换
$$x_\mu'=a_{\mu\nu}x_\nu$$

这种变换能由连续变化 $a_{\mu\nu}$ 的数值得到，则对于 $\det a$ 不可能有相反符号的值，但这种连续变换必须包括恒等变换 $x_\mu'=x_\mu$，因此必有
$$\det a=1$$

例如我们在狭义相对论中所遇到的变换就是其中一种，在那里

$$a=\begin{pmatrix}\eta & 0 & 0 & i\eta\dfrac{v}{c}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\eta\dfrac{v}{c} & 0 & 0 & \eta\end{pmatrix}$$

其中 $\eta=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$，它满足　$\det a=1$

(3) 位移变换

$$x'_\mu=x_\mu+b_\mu,\ a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

可见这种变换

$$\det a=1$$

$\det a=1$称为正常（正）罗仑兹变换；$\det a=-1$称为反常罗仑兹变换。

§2.2　张　量

经典场一般用场函数来描述，而场函数是四维空间坐标的函数。为了构造一个在坐标变换下有特殊相对论协变性的场方程，这些场函数应具有确定的变换关系，一般分为张量和旋量两大类。以后我们将知道张量场函数是描述自旋为整数的粒子，而旋量场函数是描述自旋为半整数的粒子。这里叙述张量场函数的一般变化规律。

1. 张量的广义定义

当坐标 $x^\mu\to x'^\mu$变换时（为了区别逆变张量和协变张量，我们用上指标表示逆变张量，下指标表示协变张量）由偏微商法则有

$$dx'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

如果一个量 V^μ 在坐标变换 $x^\mu\to x'^\mu$ 下，按上式变换，即

$$V'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}V^\nu \tag{2.2-1}$$

那么 V^μ 称为逆变矢量。由(2.2－1)可见坐标微分是一逆变矢量。

如果在坐标变换 $x^\mu\to x'^\mu$下，量 U_μ 的变换为

$$U'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}U_\nu \tag{2.2-2}$$

则 U_μ 称为协变矢量。

一般地，张量有 n 个指标，按照不同的变化规则可区分为 n 阶协变张量、逆变张量和混合张量。

如果有一张量，将其中二指标交换后其值不变，则称为对于此二指标的对称张量，若交换二指标后其值变一负号，则称为对此二指标的反对称张量，即：

$$A_{\alpha\beta\mu\cdots\nu}=\pm\ A_{\alpha\mu\beta\cdots\nu}$$

正号对 $\mu\beta$ 对称

负号对 $\mu\beta$ 反对

如果任意交换两指标，其值不变（或变号），就称为完全对称（或完全反对称）张量。

2. **特殊相对论中的张量**

在特殊相对论中，广义 Lorentz 变换为

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu+b_\mu \tag{2.2-3}$$

将上式两边乘以 $a_{\mu\lambda}$并对 μ 取和，并利用正交关系(2.1—3)可得 (2.2—3) 的逆变换

$$x_\lambda=a_{\mu\lambda}x'_\mu-a_{\mu\lambda}\ b_\mu \tag{2.2-4}$$

（上面为了和前面一致把 x 的指标写在下角，这不影响我们的讨论)。由 (2.2—3) 和 (2.2—4) 可得

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=a_{\mu\nu} \tag{2.2-5}$$

可见，同级的协变，逆变和混合张量按同样的变换关系变换，也就是说，它们没有区别，所以我们以后将不区分它们而统称为张量，n 级张量的变换规律为

$$A'_{\alpha\beta\cdots\gamma}(x')=a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}\cdots a_{\gamma\sigma}A_{\mu\nu\cdots\sigma}(x) \tag{2.2-6}$$

场论中常用到的张量有如下几种

(1) 标量——又称零级张量，当四维坐标做广义罗仑兹变换时，它的数值保持不变即

$$A'(x')=A(x) \tag{2.2-7}$$

例如静止质量、粒子的电荷、固有时间等。

(2) 矢量 A_μ——又称一级张量，有4个分量，按 (2.2—6) 其变换规律为

$$A'_\mu(x') = a_{\mu\alpha}A_\alpha(x) \tag{2.2-8}$$

例如粒子的能量—动量 P_μ。

(3) 张量 $A_{\mu\nu}$——常指二级张量，有16个分量，按（2.2—6）其变换规律为

$$A'_{\mu\nu}(x') = a_{\mu\rho}a_{\nu\theta}A_{\rho\theta}(x) \tag{2.2-9}$$

类似地可写出更高级张量。张量的级数等于非重迭指标（不求和指标）的数目。如 $A_\mu B_\mu$ 是零级张量，而 $A_{\mu\nu}B_\nu$ 是一级张量等等。

在高级张量中，完全反对称的张量具有特别简单的性质。凡是有两个下标相同的分量都等于零，而只有下标完全不同的那些分量才不等于零。如果将不为零的分量的下标对调一次，将差一个负号，属于这样的张量有两种，一种是三级反对称张量，它只有四个独立分量 A_{234}、A_{314}、A_{124}、A_{123}，另一种是四级反对称张量，它只有一个独立分量 A_{1234}，因为它所有不为零的分量的绝对值都相等。显然高于四级的完全反对称张量是不存在的。

为了说明反对称张量的特性，我们引进一个常用的记号

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\theta}=\begin{cases}+1 & \text{当 } \mu\nu\rho\theta \text{ 进行偶数次置换能还原为} \\ & 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \text{的自然次序} \\ -1 & \text{当 } \mu\nu\rho\theta \text{ 进行奇数次置换能还原为} \\ & 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \text{的自然次序} \\ 0 & \text{当 } \mu\nu\rho\theta \text{ 中有任意两指标相同时}\end{cases}$$

这是一个四级完全反对称张量。

(4) 赝张量

当坐标做变换 $x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ 时，物理量除了按上述规则变换外，还乘上一个该变换矩阵的行列式 $\det a$ ，则该物理量称为赝张量。下面是在坐标变换下，各种赝张量的变换式子

$$\left.\begin{array}{ll}\text{赝标量} & \tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi}' = (\det a)\tilde{\Phi} \\ \text{赝矢量} & \tilde{A}_\rho \to \tilde{A}'_\theta = (\det a)a_{\theta\rho}\tilde{A}_\rho \\ \text{赝张量} & \tilde{B}_{\gamma\sigma} \to \tilde{B}'_{\rho\theta} = (\det a)a_{\rho\gamma}a_{\theta\sigma}\tilde{B}_{\gamma\sigma}\end{array}\right\} \tag{2.2-10}$$

上面引进的完全反对称张量 $\widetilde{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$有时称为“数值不变”的赝张量，因为它在所有坐标系中都被定义为一样，而真正的张量的分量，一般在坐标变换下是改变数值，而且对反射变换，矢量是要改变符号的。

§2.3 电磁场方程

电磁场理论是场论中发展得最早的理论，电磁场方程(Maxwell，1862)是第一个相对论性波动方程。场的量子化也是从电磁场开始的，而且描述电磁相互作用的量子电动力学是量子场论里取得最成功的部分。

1. Maxwell方程的协变形式

在经典电动力学里，在电荷、电流不存在的空间（在没有相互作用情况下），电磁场是纯粹的辐射场，或者说是自由电磁场。它的运动方程满足如下的 Maxwell 方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{2.3-1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{2.3-2}$$

引进如下定义的电磁势 $A_\mu(\boldsymbol{A},iA_0)$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla A_0\end{aligned}\right\}\tag{2.3-3}$$

和如下定义的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\tag{2.3-4}$$

这里 $F_{23}=H_1, F_{31}=H_2, F_{12}=H_3$ 是磁场场强

$iF_{14}=E_1, iF_{24}=E_2, iF_{34}=E_3$ 是电场场强

于是（2.3—1）和（2.3—2）可分别改写成：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=0\tag{2.3-5}$$

和 $$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}=0 \tag{2.3-6}$$

这两个方程就是协变形式的 Maxwell 方程，它们对固有 Lorentz 变换是协变的。

2. **第二规范变换**

在经典电动力学中直接从电磁场的场强方程进行求解或讨论问题常遇到不便，并且用场强方程对场进行量子化也有困难，为此，我们转用电磁势方程。

以（2.3—4）代入（2.3—5）得：

$$\partial_\nu^2 A_\mu-\partial_\mu(\partial_\nu A_\nu)=0 \tag{2.3-7}$$

(2.3—4)所定义的电磁势 A_μ 不是唯一的，因为给定客观的物理场强 $F_{\mu\nu}$（即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$），可以用不同的函数 A_μ 来描述，例如 A_μ 是给定的 $F_{\mu\nu}$（即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$）的电磁势，那么

$$A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\alpha$$

（其中 α 是任意标量函数）也可以作为 $F_{\mu\nu}$ 的电磁势，因为

$$\frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}=F_{\mu\nu}$$

考虑到电磁势选择的不唯一性（任意性），我们可以通过适当的选择使得 A_μ 满足如下条件（Lorentz 条件）

$$\partial_\nu A_\nu=0 \tag{2.3-8}$$

在这个条件下，（2.3—7）具有如下的简洁形式：

$$\partial_\nu^2 A_\mu=0 \tag{2.3-9}$$

上式称为达郎伯（d′ Alembert）方程

这样只有满足 d′ Alembert 方程又满足 Lorentz 条件的电磁势才是客观上的电磁场，尽管增加了 Lorentz 条件的限制，但是，A_μ 还不是唯一的，因为，它仍可在满足

$$\partial_\mu^2\alpha=0 \tag{2.3-10}$$

的条件下，作如下的变换

$$A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu} \tag{2.3-11}$$

经过（2.3—11）变换（要满足（2.3—4）），达朗伯方程和罗仑兹

条件都不变，泡里［Pauli1940］称（2.3－11）为第二种规范变换，电磁场方程（2.3－5）和（2.3－6）对第二规范变换具有不变性，当然它对固有 Lorentz 变换是不变的，因此是相对论性波动方程。

§2.4　Klein—Gordon 方程

1. Klein—Gordon 方程

实验和理论进入高速微观现象的领域，人们要寻求一个既能描述微观现象，又能描述高速现象的理论。在非相对论量子力学中，自由粒子的薛定格方程可以从经典的能量、动量与质量关系式

$$E=\frac{p^2}{2m}.$$

利用算子替换

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t}\qquad p\to -i\nabla \tag{2.4-1}$$

并作用在波函数上得到：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \tag{2.4-2}$$

显然上面的 Schrödinger 方程不满足相对论要求，因为对时间是一次微商，对空间是二次微商，这种对时空坐标的不对称性说明 Schrödinger 方程不具有 Lorentz 不变性。为了建立一个满足相对论不变性要求的方程，人们注意到在相对论中，能量、动量和质量存在如下关系

$$p^2+m^2=0 \tag{2.4-3}$$

其中　$p^2=p_\mu p_\mu=\boldsymbol{p}^2+p_4^2=\boldsymbol{p}^2-E^2$

利用（2.4—1）的变换到（2.4—3）中，即得到

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\nabla^2\psi+m^2\psi=0$$

即

$$(\partial_\mu^2-m^2)\psi=0 \tag{2.4-4}$$

上式称为 Klien—Gordon 方程，这个方程的时空微商处于对称地

位，具有协变形式，是一个相对论波动方程。

2. **负几率困难**

仿照非相对论量子力学的方法，我们可以根据 Klein—Gordon 方程导出几率密度和几率流密度分别为：

$$\omega(x) = -iJ_4 = \frac{i}{2m}\left(\varphi^* \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi\right) \qquad (2.4-5)$$

$$J(x) = \frac{i}{2m}(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi). \qquad (2.4-6)$$

它们满足连续性方程

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \qquad (2.4-7)$$

由于 Kilen—Gordon 方程对 t 是二阶导数，φ 和$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$必是两个任意给定的初始条件，也就是说，在某一时刻 φ 和$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 可以任意取值，于是 $\omega(x)$ 就不一定是正定的量，可以是负，也可以是零。这就是所谓负几率困难。所以 $\omega(x)$ 不能看作粒子处于(x) 点的几率密度。这样，严格地讲，Klien—Gordon 方程不能像非相对论 Schrödinger 方程一样，用来描述一个微观粒子的运动。正因为如此，它发现后几乎被遗弃了七年之久，直至1934年 Pauli 和 Weisskopf 认为可以把它看作类似于宏观电磁场方程一样的经典场方程，在进行量子化之后，正如电磁场描述多光子系统的运动一样，$\varphi(x)$ 场也可描述多粒子系统的运动。由于 K—G 方程中只含一个标量函数 $\varphi(x)$，所以它描述的粒子除空间自由度外不再能有自旋自由度。所以 K—G 方程只能是描写自旋为零的粒子的场。实验证实，量子化后的场 φ 可以正确地反映自旋为零的 π 介子、K 介子等一类微观粒子的运动规律。

§2.5 Dirac 方程

1. **自由粒子的 Dirac 方程**

为了避免 Klien—Gordon 方程所带来的负几率困难，狄拉克认为：满足相对论要求的波动方程应该是时间 t 和空间 x 的一级微分方程，这样既可使时、空坐标处于对称地位，又可避免在几率密度的表示式中出现 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$，从而不会发生负几率的困难。另一方面，在非相对论量子力学里，自旋电子是用泡里二分量理论来描述，因此描述相对论电子的波函数至少也必须有两个分量，这样才能使得作非相对论近似时趋于泡里理论。下面我们将看到狄拉克方程中的波函数 ψ 有四个分量，它可描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子。

为了确立自由粒子的狄拉克方程，将相对论能量关系式两边开平方。

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \tag{2.5-1}$$

并将上式认为是算符而作用在波函数 ψ 上，但上式右边是非线性的，不满足量子力学中算符为线性的要求，Dirac 把它写成如下形式：

$$\sqrt{p^2 + m^2} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m) \tag{2.5-2}$$

上式右边是哈密顿算符，即

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m \tag{2.5-3}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$（α_1，α_2，α_3）和 β 是与坐标和动量无关的算符，可理解为作用在粒子本身的某一自由度（被称为自旋自由度）上的算符。$\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 分别与 $\boldsymbol{p}$ 可以对易，但 α_1、α_2、α_3、β 之间不一定可以对易。

将（2.5—2）两边平方，为使两边恒等，必须服从如下的关系：

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = \alpha_2\beta + \beta\alpha 2 = \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0$$

或简写成如下的对易关系

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2,3) \\ &\alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0 \\ &\beta^2 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5-4}$$

可见，α_1、α_2、α_3、β 是四个互相反对易的算符。又因为它们各自的平方都等于1，所以它们的本征值是± 1。它们可以用4×4矩阵表示。这样，自由粒子的 Dirac 方程为：

$$(i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\nabla-\beta m)\psi=0 \qquad (2.5-5)$$

既然 α、β 为4×4矩阵，ψ 自然就是一列四行矩阵

$$\psi=\begin{vmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{vmatrix} \qquad (2.5-6)$$

将（2.5—5）乘以算符

$$(i\frac{\partial}{\partial t}-i\alpha\nabla+\beta m)$$

并利用对易关系（2.5—4）就可得

$$(\partial_\mu^2-m^2)\psi=0 \qquad (2.5-7)$$

可见 $\psi(x)$ 满足 Klien—Gordon 方程。但满足 Klien—Gordon 方程的波函数 $\varphi(x)$ 不一定满足 Dirac 方程。

为求出几率密度 ρ 和几率流密度 J 的公式，我们写出共轭的 Dirac 方程

$$-i\frac{\partial\psi^+}{\partial t}-i\nabla\psi^+\alpha-\psi^+\beta m=0 \qquad (2.5-8)$$

式中 ψ^+是 ψ 的厄米共轭矩阵，即

$\psi^+=(\psi_1^*\psi_2^*\psi_3^*\psi_4^*)$，因此 α 和 β 作用在 ψ^+上时，必须写在 ψ^+ 的右边。以 ψ^+左乘（2.5—5），以 ψ 右乘（2.5—8）然后相减，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi)+(\psi^+\alpha\nabla\psi+\nabla\psi^+\alpha\psi)=0$$

与连续方程对比有

$$\rho=\psi^+\psi \qquad (2.5-9)$$

$$J=\psi^+\alpha\psi \qquad (2.5-10)$$

这里 ρ 的形式与非相对论的形式相同，故在单粒子理论中可解释

为几率密度，并且永远为正值。

2. **算符 α 和 β 的矩阵表示**

由于 α_i、β 彼此之间是反对易而不是对易的，所以它们不可能是数，而且它们满足电子自旋算符同样的规律，因此可用矩阵表示。

(1) α_i、β 是本征值为±1的偶阶方阵

因为哈密顿算符为厄米算符，所以 α_i、β 也应为厄米算符，由 $\alpha^+=\alpha$、$\beta^+=\beta$ 得

$$(\alpha_i)^*_{nm}=(\alpha_i)_{mn}, \qquad \beta^*_{nm}=\beta_{mn}$$

可见 α_i 和 β 应为方阵。由于 $\alpha_i^2=\beta^2=1$，故它们的本征值为±1。由反对易关系 $\beta\alpha_i=-\alpha_i\beta$，有

$$\alpha_i=-\beta\alpha_i\beta$$

两边取矩阵迹有

$$Tr\alpha_i=-Tr(\beta\alpha_i\beta)=-Tr\alpha_i$$

所以

$$Tr\alpha_i=0$$

由于矩阵迹正好是诸本值的和，而本征值只能是$+1$和-1，因此，α_i 必为偶阶矩阵。类似的做法，可推得

$$Tr\beta=0$$

所以 β 也是偶阶矩阵。

(2) α 和 β 的显示表示

由于 α_i 和 β 是四个独立的矩阵，且要满足（2.5—4）的对易关系，但满足（2.5—4）对易关系的二阶矩阵（如泡里矩阵 σ_i）只有三个。为简单起见，我们要求它们具有最低阶，因此，我们尝试用四阶方阵来表示这些矩阵算符。选取 β 为对角的表象，即可推证得

$$\beta=\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} \qquad \alpha=\begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{vmatrix} \qquad (2.5-11)$$

其中 I 是2×2单位矩阵，σ 是泡里矩阵，明显表示式是

$$\beta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\qquad \alpha_1=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\alpha_2=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\0 & 0 & i & 0\\0 & -i & 0 & 0\\i & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad \alpha_3=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\tag{2.5-12}$$

上面矩阵推证如下：由（2.5—4）式有 $\alpha_1\beta+\beta\alpha_1=0$，取第 k 行第 j 列元素有

$$(\alpha_1\beta)_{kj}+(\beta\alpha_1)_{kj}=0$$

上式可改写成（考虑到 β 为上面对角矩阵）

$$(\alpha_1)_{kj}(\beta_k+\beta_j)=0$$

由于 β_k 和 β_j 只取＋1和－1，故当两者同号，即 $\beta_k=\beta_j$ 时 $(\alpha_1)_{kj}=0$；当两者反号，即 $\beta_k=-\beta_j$ 时 $(\alpha_1)_{kj}$ 不必为零，故 α_1 可写成

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1'\\ \alpha_1'' & 0\end{pmatrix}$$

其中 α_1' 和 α_1'' 都是2×2阶子矩阵。由 $\alpha_1^2=1$ 有

$$\alpha_1'\alpha_1''=\alpha_1''\alpha_1'=1$$

为简单起见，取 $\alpha_1'=\alpha_1''$，于是上式变成 $\alpha_1'^2=1$，且

$$\alpha_1=\begin{vmatrix}0 & \alpha_1'\\ \alpha_1' & 0\end{vmatrix}$$

同理可得

$$\alpha_2=\begin{vmatrix}0 & \alpha_2'\\ \alpha_2'' & 0\end{vmatrix}\qquad \alpha_2'^2=1$$

$$\alpha_3=\begin{vmatrix}0 & \alpha_3'\\ \alpha_3'' & 0\end{vmatrix}\qquad \alpha_3'^2=1$$

利用反对易关系 $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1=0$ 得

$$\begin{vmatrix}0 & \alpha_1'\\ \alpha_1' & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & \alpha_2'\\ \alpha_2' & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & \alpha_2'\\ \alpha_2' & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & \alpha_1'\\ \alpha_1' & 0\end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix} \alpha_1'\alpha_2' + \alpha_2'\alpha_1' & 0 \\ 0 & \alpha_1'\alpha_2' + \alpha_2'\alpha_1' \end{vmatrix} = 0$$

于是 $\alpha_1'\alpha_2'+\alpha_2'\alpha_1'=0$，对下指标 1，2，3 循环交换得到

$$\alpha_i'\alpha_j'+\alpha_j'\alpha_i'=0 \qquad i，j=1，2，3$$

这正好是泡里矩阵 σ_i 所满足的对易关系，因此可取 $\alpha_i'=\sigma_i$，便得到 (2.5－11) 式。α，β 矩阵的这种表示又称为泡里基本表象。

§ 2.6　电子的自旋角动量

在非相对论量子力学中，电子的自旋是基于一些实验事实，把自旋看成第四个自由度而附加进去的。现在我们从相对论性的方程出发，可以很自然地得出电子应具有自旋角动量。

为此，研究电子在库仑中心力场中的运动，这时具有势能 $V=e\varphi(r)$，于是

$$H = \alpha \cdot p + m\beta + e\varphi(r) \qquad (2.6-1)$$

我们知道，在中心力场中，电子的总角动量应该守恒，但应用上式可以证明电子的单纯轨道角动量 $L=r\times p$ 不守恒。

由于中心力场的势 $\varphi(r)$ 只与 r 有关，而轨道角动量算符在球坐标中与 r 无关，故 $\varphi(r)$ 与 L_i 可对易。利用 $L_1=x_2p_3-x_3p_2$ 有

$$i\frac{\partial L_1}{\partial t} = [L_1,H] = L_1H - HL_1$$

$$= \alpha \cdot [(x_2p_3-x_3p_2)\ p - p\ (x_2p_3-x_3p_2)]$$

$$= -i\ (\alpha_3p_2-\alpha_2p_3) \neq 0 \qquad (2.6-2)$$

其它分量可进行类似的讨论。

可见 H 与 L 是不可对易的，故在中心对称力场中轨道角动量不守恒，由于总角动量一定守恒，因此，必定存在一种附加的动量矩，使得总动量矩守恒。

为寻求这一附加动量矩算子，我们作一个四阶方阵 Σ

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix}$$

其中 σ 为泡里矩阵。

$$\Sigma_1\beta = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta\Sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_1\alpha_1 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1\Sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

可直接验证，$\Sigma_1\beta-\beta\Sigma_1=0$，$\Sigma_1\alpha_1-\alpha_1\Sigma_1=0$ 即 Σ_1 与 β 和 α_1 均可对易。利用关系式 $\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3$ 可得

$$\Sigma_1\alpha_2-\alpha_2\Sigma_1 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{vmatrix} = 2i\alpha_3$$

类似地有

$$\Sigma_1\alpha_3 - \alpha_3\Sigma_1 = -2i\alpha_2$$

以上说明 Σ_1与 α_2，α_3不可对易，于是

$$i\frac{\partial\Sigma_1}{\partial t} = \Sigma_1 H - H\Sigma_1 = +2i(\alpha_3 p_2 - \alpha_2 p_3)$$

上式乘以$\frac{1}{2}$，则和（2.6－2）差一负号。令

$$J = L + \frac{1}{2}\Sigma \tag{2.6－3}$$

则 J 和 H 可对易，因此 J 应是守恒的总角动量，而算符

$$S = \frac{1}{2}\Sigma \tag{2.6－4}$$

称为电子的自旋角动量算符。电子的自旋性质能自然地由考虑到相对论效应的Dirac 方程得出。

§2.7 Dirac 方程的协变性

1. Dirac 方程的协变形式

为了便于相对论计算和讨论的方便，我们将 Dirac 方程改写成协变的形式。以 $-\beta$ 乘（2.5—5）式，得

$$(\beta\frac{\partial}{i\partial t} - i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m)\psi = 0 \qquad (2.7-1)$$

令

$$\gamma_j = i\beta\alpha_j \qquad \beta = \gamma_4 \qquad (2.7-2)$$

则（2.7—1）可写成

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \qquad (2.7-3)$$

根据 α_j 与 β 的对易关系（2.5—4）和 γ_μ 的定义式（2.7—2）可证 γ_μ 的对易关系为

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (2.7-4)$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是厄米矩阵，所以 γ_μ 也是厄米矩阵，即

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$$

Dirac 方程（2.5—5）的相伴（共轭）方程为

$$\partial_j\psi^+\gamma_j - \partial_4\psi^+\gamma_4 + m\psi^+ = 0 \qquad (2.7-5)$$

引进相伴（共轭）波函数 $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_4$，上式写成

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0 \qquad (2.7-6)$$

其中 $\overleftarrow{\partial}_\mu$ 表示向左对 $\bar{\psi}$ 求导数。在泡里基本表象中，γ 矩阵可表示为

$$\gamma_j = \begin{vmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{vmatrix} \qquad \gamma_4 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}$$

其中泡里矩阵

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

代入得

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2.7—3) 和 (2.7—6) 分别为 Dirac 方程及其共轭方程的协变形式。引进记号 $\hat{p}=\gamma_\mu p_\mu$，可在动量空间将 Dirac 方程写成更加简洁的形式

$$(i\hat{p}+m)\psi = 0 \quad 和 \quad \bar{\psi}\,(i\hat{p}+m) = 0 \qquad (2.7-7)$$

2. Dirac 方程的正 Lorentz 变换不变性

(1) 不变性条件

在 x 坐标系中 Dirac 方程为

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \qquad (2.7-8)$$

当坐标作正罗仑兹变换

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (2.7-9)$$

时，我们要求在新坐标 x' 系中狄拉克方程仍然保持原来的形式：即

$$(\gamma_\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \qquad (2.7-10)$$

下面讨论要满足上述要求所需要具备的条件。在变换中，我们保持 γ_μ 不变，因为 γ_μ 的作用仅是把 φ 的四个分量方程写成一个矩阵方程，故没有必要要求 γ 矩阵的形式随坐标变换而改变。但波函数则随坐标变换而改变。设想对任一 $a_{\mu\nu}$，存在一个非奇异的幺正矩阵 Λ $(a_{\mu\nu})$，且其行列式 $\det\Lambda\neq 0$，使得波函数作如下变换：

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x) \qquad (2.7-11)$$

其中，Λ 假定为非奇异4×4矩阵，它只依赖于 $a_{\mu\nu}$，而与坐标 x 无关。将上式和 $\partial_\mu = a_{\mu\nu}\partial_\nu$ 代入 (2.7—10) 得

$$\gamma_\mu \Lambda a_{\mu\nu} \partial_\nu \psi + m \Lambda \psi = 0$$

以 Λ^{-1}左乘上式得

$$\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda a_{\mu\nu} \partial_\nu \psi + m \psi = 0$$

要使上式和（2.7－8）相同就要求

$$\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda a_{\mu\nu} = \gamma_\nu$$

两边乘 $a_{\rho\nu}$并对 ν 取和得

$$\Lambda^{-1} \gamma_\rho \Lambda = a_{\rho\nu} \gamma_\nu \qquad (2.7-12)$$

这就是狄拉克方程在正 Lorentz 变换下保持不变性所需满足的条件。

(2) 正罗仑兹变换的 Λ 矩阵

我们把罗仑兹变换分为二类，一类是不包含空间反射和时间反演的变换称为正罗仑兹变换，另一类是包含有空间反射或时间反演的变换。任意一个正罗仑兹变换可用一系列的无穷小罗仑兹变换来完成。

无穷小 Lorentz 变换的 Λ 矩阵

对无穷小 Lorentz变换有如下关系

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (2.7-13)$$

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \qquad (2.7-14)$$

波函数的变换是

$$\varphi'(x') = \Lambda \varphi(x) \qquad (2.7-15)$$

由 $a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$和（2.7－13）有（略去高级无穷小项）

$$\begin{aligned} \delta_{\nu\lambda} &= (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})(\delta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\mu\lambda}) \\ &= \delta_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

所以
$$\varepsilon_{\nu\lambda} = -\varepsilon_{\lambda\nu} \qquad (2.7-16)$$

$\varepsilon_{\nu\lambda}$是一个反对称张量，把 Λ（$\varepsilon_{\mu\nu}$）在 $\varepsilon_{\mu\nu}=0$附近展开，并略去高级无穷小量，得到

$$\Lambda(\varepsilon_{\mu\nu}) = \Lambda(0) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right)_0 \varepsilon_{\mu\nu}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right)_0 \varepsilon_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0 \varepsilon_{\nu\mu}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0\right] \varepsilon_{\mu\nu}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} s_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (2.7-17)$$

其中
$$s_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0 = -s_{\nu\mu} \qquad (2.7-18)$$

它是一个反对称张量。取 $\varepsilon_{\mu\nu}$的一阶无穷小，利用 $\Lambda^{-1}\Lambda=1$，立即可得到

$$\Lambda^{-1} = 1 - \frac{1}{2} s_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (2.7-19)$$

将（2.7—17）和（2.7—19）代入不变性条件（2.7—12）得到

$$(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\gamma_\nu = \left(1 - \frac{1}{2} s_{\rho\lambda}\varepsilon_{\rho\lambda}\right)\gamma_\mu\left(1 + \frac{1}{2} s_{\rho\lambda}\varepsilon_{\rho\lambda}\right)$$

$$= \gamma_\mu + \frac{1}{2}(\gamma_\mu s_{\rho\lambda} - s_{\rho\lambda}\gamma_\mu)\varepsilon_{\rho\lambda} + \cdots$$

对比两边 $\varepsilon_{\mu\nu}$同次幂的项，得

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu s_{\rho\lambda} - s_{\rho\lambda}\gamma_\mu)\varepsilon_{\rho\lambda} \qquad (2.7-20)$$

为了比较方便，我们用 $\varepsilon_{\mu\nu}$的反对称性改写成

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\rho\lambda}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} = \varepsilon_{\lambda\rho}\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\rho\lambda}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\rho}\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\lambda})$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\lambda}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\lambda})$$

于是
$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\lambda}(\delta_{\mu\rho}\gamma_\lambda - \gamma_\rho\delta_{\mu\lambda}) \qquad (2.7-21)$$

上式与（2.7—20）对比 $\varepsilon_{\rho\lambda}$系数，得

$$\gamma_\mu s_{\rho\lambda} - s_{\rho\lambda}\gamma_\mu = \gamma_\lambda\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\mu\lambda} \qquad (2.7-22)$$

由于 $s_{\mu\nu}=-s_{\nu\mu}$和 $\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$ （对 $\mu\neq\nu$）有相同的反对称性，取 $s_{\mu\nu}=c\ (\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)$ 做为试探解（其中 c 为待定系数）代入（2.7—22）式，求得 $c=\frac{1}{4}$，所以

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \tag{2.7-23}$$

由于 $s_{\mu\nu}$的反对称性，故有

$$s_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu & \mu \neq \nu \\ 0 & \mu = \nu \end{cases} \tag{2.7-24}$$

(3) 有限转动变换的 Λ 矩阵

借助上述所得结果，可求出有限转动变换的 Λ 矩阵的显示式。设 θ 为在平面 $x_\lambda x_\nu$ 内的转角，由转动的可加性得

$$\Lambda(\theta_1 + \theta_2)\psi = \Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2)\psi \tag{2.7-25}$$

在上式中令 $\theta_1=\theta$，$\theta_2=\mathrm{d}\theta$，于是：

$$\Lambda(\theta + \mathrm{d}\theta) = \Lambda(\theta)\Lambda(\mathrm{d}\theta)$$

$$\frac{\Lambda(\theta + \mathrm{d}\theta) - \Lambda(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \Lambda(\theta)\frac{\Lambda(\mathrm{d}\theta) - 1}{\mathrm{d}\theta}$$

考虑到 (2.7－17)，我们得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \Lambda(\theta)s_{\lambda\nu}$$

积分上式，并用初始条件 Λ (0) ＝1，则有：

$$\Lambda_{\lambda\nu}(\theta) = e^{\frac{1}{2}\gamma_\lambda\gamma_\nu\theta} \tag{2.7-26}$$

例 1　x' 相对 x 在 x_1，x_2 平面内转过一角度 θ，(反时针转动)。

坐标变换

$$\begin{aligned} x_1' &= \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \\ x_2' &= -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{aligned} \tag{2.7-27}$$

波函数变换

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x)$$

对 $e^{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\theta}$作级数展开，并注意到 $\gamma_1\gamma_2$的反易性和 $\gamma_1^2=\gamma_2^2=1$，即得

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\theta} = \cos\frac{\theta}{2} + \gamma_1\gamma_2\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.7-28}$$

由这个例子可见波函数的非唯一性，令 $\theta=2\pi$，Λ (2π) ＝-1，相应于坐标绕 x_3 轴动一周，坐标系回到原来的位置，但波函数 ψ 在

这个变换下改变一个负号，所以，旋量波函数的确定常差一个负号。

例 2　x' 坐标系相对 x 坐标系，沿 x_1 轴以匀速 v 运动。这是我们熟悉的狭义相对论中的 Lorentz 变换。

$$x_1' = \eta(x_1 - vt) = \eta(x_1 + i\frac{v}{c}x_4)$$

$$x_4' = \eta\ (x_4 - i\frac{v}{c}x_1)$$

其中　$\eta = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$

如果我们令 $\cos\theta = \eta$，$\sin\theta = i\frac{v}{c}\eta$（此时 θ 应为虚角），那么上式可以写成

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \cos\theta x_1 + \sin\theta x_4 \\ x_4' &= -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-29)$$

令 $\theta = i\omega$，上式写成

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cosh\omega - x_0\sinh\omega \\ x_0' &= -x_1\sinh\omega + x_0\cosh\omega \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-30)$$

由于（2.7－29）和前面（2.7－27）形式上完全类似，因此，我们可把这种 Lorentz 变换（惯性系变换）看成是 x_1x_4 平面的转动一个虚角的变换。

按照计算（2.7－28）的方法我们可得到如下的表式：

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_4\theta} = \cos\frac{\theta}{2} + \gamma_1\gamma_4\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \cosh\frac{\omega}{2} + i\gamma_1\gamma_2\sinh\frac{\omega}{2}$$

或

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\eta + 1}{2}} - \alpha_1\sqrt{\frac{\eta - 1}{2}}$$

上式用了 $\alpha_1 = -i\gamma_1\gamma_4$

3. 空间反射和时间反演不变性

空间反射变换

$$\left.\begin{aligned} x \to x' &= -x, \qquad t \to t' = t, \\ \nabla \to \nabla' &= -\nabla, \partial_t \to \partial_t' = \partial_t, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-32)$$

其变换矩阵

$$a_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式 $\det a = -1$，这是一种分立变换，不能用相继的无穷小变换来实现。这种变换下 Dirac 方程（2.7—3）变成

$$(-\gamma \cdot \nabla' + \gamma_4 \partial_4 + m)\psi(-x', t') = 0 \quad (2.7-33)$$

设有一个 4×4 矩阵 P 和它的逆矩阵 P^{-1}存在，满足条件

$$P\gamma P^{-1} = -\gamma, \qquad P\gamma_4 P^{-1} = \gamma_4 \qquad (2.7-34)$$

并且令这个变换下，旋量做如下变换：

$$\psi(x,t) \to \psi(x', t') = P\psi(-x', t') = P\psi(x,t) \qquad (2.7-35)$$

用 P 左作用于（2.7—33）式并利用 $P^{-1}P=1$，则有

$$(-P\gamma P^{-1}\nabla' + P\gamma_4 P^{-1}\partial'_4 + m)P\psi(-x', t') = 0$$

再利用（2.7—32），（2.7—34）和（2.7—35）式，上式变成

$$(\gamma_\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \qquad (2.7-36)$$

这表明坐标反射变换前后 Dirac 方程具有完全相同的形式。

满足条件(2.7—34)的矩阵确实存在，可取 $P=\gamma_4$。因此，Dirac 方程具有空间反射不变性，其旋量波函数的变换性质由（2.7—35）来决定。

时间反演是另一种分立变换，也不能由相继的无穷小变换来实现。时间反演的变换式是

$$\left.\begin{aligned} x \to x' &= x, \qquad t \to t' = -t, \\ \nabla \to \nabla' &= \nabla, \qquad \partial_t \to \partial_t' = -\partial_t, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-37)$$

变换系数矩阵行列式 $\det a = -1$

$$a_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \det a = -1$$

在此变换下，Dirac 方程（2.7—3）变成：

$$(\gamma \cdot \nabla' + \gamma_4 \partial_4' + m)\psi(x', t') = 0 \qquad (2.7-38)$$

设有一个 4×4 矩阵 T 及其逆矩阵 T^{-1} 存在，满足

$$T\gamma T^{-1} = \gamma, \quad T\gamma_4 T = -\gamma_4 \qquad (2.7-39)$$

并令旋量波函数作如下变换

$$\psi(x,t) \to \psi(x', t') = T\psi(x', -t') = T\psi(x, t) \qquad (2.7-40)$$

用 T 从左作用于（2.7—38）并利用 $T^{-1}T=1$，得

$$(T\gamma T^{-1} \cdot \nabla' - T\gamma_4 T^{-1}\partial_4' + m)T\psi(x', -t') = 0$$

将（2.7—39）和（2.7—40）代入上式得

$$(\gamma_\mu \partial_\mu' + m)\psi'(x') = 0$$

可见 Dirac 方程具有时间反演不变性。事实上满足（2.7—39）的 T 矩阵确定存在，例如可取 $T=i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$，并且有 $T^+=T=T^{-1}$。

4. 电荷共轭变换

自然界存在正、反两类粒子，例如电子与正电子，质子与反质子，中微子与反中微子等，它们的质量，自旋和平均寿命相同，但分别带有相反的磁矩、粒子数等量子数。对荷电粒子，还带有相反符号的电荷。电荷共轭变换也就是一种正、反粒子的变换。为便于理解其物理意义，我们研究一个荷电旋量粒子（如电子、质子）在电磁场中的运动。根据最小作用量原理，这时应作变换 $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$，即Dirac 方程及其共轭方程分别是

$$(\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi(x) = 0 \qquad (2.7-41)$$

和

$$(\gamma_\mu^T(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\bar{\psi}^T(x) = 0 \qquad (2.7-42)$$

现研究这两个方程之间的联系。设有一个4×4矩阵 C，并存在逆矩阵 C^{-1}满足

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \qquad (2.7-43)$$

定义一个新旋量

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}^T(x) \qquad (2.7-44)$$

用 C 左作用于（2.7—42）式，注意 $C^{-1}C=1$ 得

$$(C\gamma_\mu^T C^{-1}(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\bar{\psi}^T(x) = 0$$

利用（2.7—42）和（2.7—43），上式变成

$$(\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\psi^c(x) = 0 \qquad (2.7-45)$$

可见，做 C 变换后，方程基本上回到原来的方程（2.7—40），只是电荷改变了符号，由 $e \to -e$。因此，若 $\psi(x)$ 是粒子的波函数，$\psi^c(x)$ 就是反粒子的波函数，(2.7—45) 就是反粒子的 Dirac 方程。所以 C 又称为正、反粒子共轭变换，或电荷共轭变换。（2.7—44）是正反粒子旋量波函数之间的变换规律。

下面讨论 C 矩阵的显示式和性质。由（2.7—43）有

$$C\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu C \qquad (2.7-46)_1$$

根据 γ_μ 矩阵的性质

$$\gamma_1^T = -\gamma_1 \quad \gamma_2^T = \gamma_2 \quad \gamma_3^T = -\gamma_3 \quad \gamma_4^T = \gamma_4$$

故由（2.7—46）可知，C 与 γ_1，γ_3 对易，与 γ_2，γ_4 反对易，于是我们选取

$$C = i\gamma_2\gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

正好满足（2.7—43）的要求（可直接验证）。可证

$$C^+ = C = C^{-1} \qquad C^T = -C = C^* \qquad \bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1} \qquad (2.7-46)_2$$

5. CPT 共轭变换

同时进行 C, P, T 三种变换称为 CPT 共轭变换。在 P、T 同时变换下

$$x \to x' = -x, \quad t \to t' = -t, \quad \partial_\mu \to \partial'_\mu = -\partial_\mu, \qquad (2.7-47)$$

利用上式，在电磁场中运动的荷电粒子的 Dirac 方程(2.7—41)可改写成

$$(-\gamma_\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)+m)\psi(-x')=0$$

设有一个 4×4 矩阵 S 及其逆矩阵 S^{-1}存在，用 S 左乘上式，并利用 $S^{-1}S=1$ 可得

$$(-S\gamma_\mu S^{-1}(\partial_\mu+ieA_\mu)+m)S\psi(-x')=0 \tag{2.7-48)}$$

若定义一个新的旋量波函数

$$\psi^S(x')=S\psi(-x')=S\psi(x) \tag{2.7-49}$$

并令 γ_μ 满足下列条件

$$S\gamma_\mu S^{-1}=-\gamma_\mu \tag{2.7-50}$$

则 (2.7—48) 变成

$$(\gamma_\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)+m)\psi'(x')=0 \tag{2.7-51}$$

比较 (2.7—41) 和上式，可知 ψ (x) 和 ψ' (x') 所满足的方程基本相同，两者只差一个电荷 e 的符号。这就是说，若 ψ (x) 是粒子的波函数，ψ^S (x) 就是反粒子的波函数。

下面讨论 S 矩阵的显示形式。利用 γ_μ 矩阵的性质和对易关系有

$$\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5^{-1}=-\gamma_\mu$$

将上式和 (2.7—50) 比较，可得

$$S=\gamma_5 \tag{2.7-51}$$

于是 (2.7—49) 可写成

$$\psi^S(x)=\gamma_5\psi(-x) \tag{2.7-52}$$

上式表明，反粒子可看成是逆时轴方向（$-t$ 方向）运动的粒子。

6. 幺正变换不变性

Dirac 方程

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x)=0$$

设有一个 4×4 矩阵 U 和它的逆矩阵 U^{-1}存在，且 U 是幺正矩阵，$U^+=U^{-1}$，用 U^{-1}左乘上式得

$$(U^{-1}\gamma_\mu U\partial_\mu+m)U^{-1}\psi(x)=0$$

若定义 $$\gamma'_\mu = U^{-1}\gamma_\mu U, \quad \psi'(x) = U\psi(x) \qquad (2.7-53)$$
则有 $$(\gamma'_\mu\partial_\mu + m)\psi'(x) = 0 \qquad (2.7-54)$$
上式表明 Dirac 方程对幺正变换具有不变性。

7. 共轭波函数的变换性质

由共轭波函数的定义 $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$，可以寻出它的变换性质。取 $\psi' = \Lambda\psi$ 的厄米共轭得

$$(\psi')^+ = \psi^+ \Lambda^+$$

根据定义，在新的坐标系 x' 中的共轭波函数是

$$\bar{\psi}' = (\psi')^+ \gamma_4 \qquad (2.7-55)$$

由上面两式得：

$$\bar{\psi}' = \psi^+ \Lambda^+ \gamma_4 = \bar{\psi}\gamma_4\Lambda^+ \gamma_4 \qquad (2.7-56)$$

上式表示，共轭波函数的变换是借助 $\gamma_4\Lambda^+\gamma_4$来完成的，对于固有 Lorentz 变换和空间反射变换，可以验证，存在如下关系

$$\gamma_4\Lambda^+ \gamma_4 = \Lambda^{-1}$$

所以

$$(\bar{\psi})' = \bar{\psi}\Lambda^{-1} \qquad (2.7-57)$$

对时间反演变换

$$\gamma_4\Lambda^+ \gamma_4 = -\Lambda^{-1}$$

所以 $$\bar{\psi}' = -\bar{\psi}\Lambda^{-1} \qquad (2.7-58)$$

8. Dirac 方程中的波函数是旋量

我们已经知道，在坐标系 x' 以匀速 V 相对 x 系沿 x_1轴运动时，坐标（矢量）的变换按（2.7—30）是

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cosh\omega - x_0\sinh\omega \\ x'_0 &= -x_1\sinh\omega + x_0\cosh\omega \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-59)$$

而波函数的变换是：

$$\psi' = \Lambda\psi \qquad \psi'^+ = (\Lambda\psi)^+ = \psi^+ \Lambda^+$$

其中 Λ 按（2.7—31）有

$$\Lambda = \cosh\frac{\omega}{2} + i\gamma_1\gamma_4\sinh\frac{\omega}{2}$$

$$= \cosh\frac{\omega}{2} - \alpha_1 \sinh\frac{\omega}{2} = e^{-\alpha_1\omega/2}$$

$$\Lambda^2 = e^{-\alpha_1\omega} = \cosh\omega - \alpha_1\sinh\omega \qquad (2.7-60)$$

由（2.7－40）可见 $\Lambda=\Lambda^+$

于是：

$$\psi'^+\psi' = \psi^+\Lambda^+\Lambda\psi = \psi^+\Lambda^2\psi \qquad (2.7-61)$$

比较（2.7－59）和（2.7－60），我们可把 Λ^2 看作一阶张量（矢量）的变换算符，而波函数的变换算符 $\Lambda=\sqrt{\Lambda^2}$，因而 Λ 看作半阶张量的变换算符。所以，ψ 就是半阶张量又称旋量，而狄拉克方程就是旋量方程。

9. 由波函数组成的协变量

对正 Lorentz 变换和空间反射变换的各种类型协变量

	协变量	变换性质	独立元数目
(1)	$\bar{\psi}\psi$	标量	1个
(2)	$\bar{\psi}\gamma_\mu A$	矢量	4个
(3)	$i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$	二级反对称张量	6个
(4)	$i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$	赝矢量	4个
(5)	$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	赝标量	1个

其中 $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ $(\gamma_5)^2=1$ $\gamma_5\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5=0$

在正 Lorentz 和空间反射变换下

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\Lambda^{-1} \qquad \psi' = \Lambda\psi \qquad (2.7-62)$$

则

$$\bar{\psi}'\gamma^A\psi' = \bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^A\Lambda\psi \qquad (2.7-63)$$

为证明上述协变量的变换性质，还须用到不变性条件

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma_\nu \qquad (2.7-12)$$

和关系式

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = (\det a)\ \gamma_5 \qquad (2.7-64)$$

上式可证明如下：按行列式的定义

$$\det a = \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\theta}a_{\mu1}a_{\nu2}a_{\rho3}a_{\theta4}$$

根据行列式两列对调，其值只改变符号的性质，有

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\theta}a_{\mu\mu'}a_{\nu\nu'}a_{\rho\rho'}a_{\theta\theta'} = (\det a)\ \tilde{\varepsilon}_{\mu'\nu'\rho'\theta'} \qquad (2.7-65)$$

此式可直接验证，例如

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\theta}a_{\mu2}a_{\nu1}a_{\rho3}a_{\theta4}=\tilde{\varepsilon}_{\nu\mu\rho\theta}a_{\mu1}a_{\nu2}a_{\rho3}a_{\theta4}\ \tilde{\varepsilon}_{2134}=(\det a)\ \tilde{\varepsilon}_{2134}$$

此外可直接验证

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=\frac{1}{4!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\theta}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\theta \qquad (2.7-66)$$

利用（2.7—47），（2.7—12）和（2.7—46）可求得

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda &=\frac{1}{4!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\rho}\Lambda^{-1}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\Lambda\\ &=\frac{1}{4!}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\rho}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}a_{\lambda\gamma}a_{\rho\sigma}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\sigma\\ &=\frac{1}{4!}(\det a)\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\sigma}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\sigma\\ &=(\det a)\ \gamma_5\end{aligned}$$

下面证明各协变量的变换性质：

(1) $\gamma^A=I$　立即有

$$\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}\Lambda^{-1}I\Lambda\psi=\bar{\psi}\psi$$

∴　$\bar{\psi}\psi$ 是标量

(2) $\gamma^A=\gamma_\mu$，利用 $\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda=a_{\mu\nu}\gamma_\nu$ 可得

$$\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi=\bar{\psi}\ \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi=a_{\mu\nu}\bar{\psi}\ \gamma_\nu\psi$$

∴　$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 是矢量

(3) $\gamma^A=\gamma_\mu\gamma_\nu$　$(\mu\neq\nu)$

类似上式证明可得

$$\begin{aligned}i\bar{\psi}'\gamma_\mu\gamma_\nu\psi &=i\bar{\psi}\ \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\Lambda^{-1}\gamma\Lambda\psi\\ &=ia_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi\end{aligned}$$

∴　是二级反对称张量

(4) $\gamma^A=\gamma_5\gamma_\mu$

利用（2.7—12）和（2.7—45）有

$$\begin{aligned}i\bar{\psi}'\ \gamma_5\gamma_\mu\psi' &=i\bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi\\ &=i\ (\det a)\ a_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\psi\end{aligned}$$

∴　$i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ 是赝矢量

(5)　$\gamma^A=\gamma_5$

$$i\overline{\psi}'\ \gamma_5\psi' = i\overline{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda\psi$$

$$= i\ (\det a)\ \overline{\psi}\gamma_5\psi$$

∴　$i\overline{\psi}\gamma_5\psi$ 是赝标量

以上几种协变量，在讨论场的相互作用时极为重要，利用它们，可以构成费米子场和其它一种场发生相互作用的拉格朗日函数。在核子和 π 介子的强相互作用中，赝标量和赝矢量特别重要，以 ψ 代表核子场，φ 代表介子场，则相互作用的拉格朗日函数具有 $\overline{\psi}\gamma_5\psi\varphi$ 或 $\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi$ 的形式。

§ 2.8　Dirac 方程的平面波解

自由粒子的 Dirac 方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \qquad (2.8-1)$$

其中哈密顿量　$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P}+m\beta$　(2.8−2)

显然 $[\mathbf{P},H]=0$，$\mathbf{P}$ 是守恒量，且能量 E 和动量 $\mathbf{P}$ 有共同的本征函数，考虑到 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 4×4 矩阵，所以 Dirac 方程的解应是一个 4 分量旋量。取

$$\psi(x) = u(p,s)e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} = u(p,s)e^{ipx} \qquad (2.8-3)$$

其中 $u(p,s)$ 是与 x，t 无关只与动量和自旋有关的 4 分量旋量。可表示为

$$u = \begin{vmatrix}\xi\\ \eta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{vmatrix} \qquad (2.8-4)$$

其中 $\xi=\begin{vmatrix}u_1\\ u_2\end{vmatrix}$，　$\eta=\begin{vmatrix}u_3\\ u_4\end{vmatrix}$ 是 2 分量旋量，于是

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix} e^{ipx} \qquad (2.8-5)$$

下面，我们寻求 Dirac 方程的平面波解(2.8 − 5)的显示形式(即 u 的显示形式)。

1. **螺旋度（Helicity）本征态**

设 $n=\frac{p}{|p|}$是粒子沿动量方向运动的单位矢量，粒子的自旋 $S=\frac{1}{2}\Sigma$。定义算符 Σ 在运动方向上的投影

$$h=\Sigma\cdot n=\frac{\Sigma\cdot p}{|p|}=\begin{vmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix}\cdot\frac{p}{|p|} \qquad (2.8-6)$$

为螺旋度或涡度（helicity）算符。由（2.8−6）有

$$h^2=1, h\equiv\lambda=\pm 1$$

即螺旋度的本征值为±1。$\lambda=1$，称为右旋粒子，$\lambda=-1$，称为左旋粒子。另外，可以证明 h 和 H 互相对易，即 $[h, H]=0$，h 是守恒量，螺旋度 h 和能量 E，动量 p 有共同的本征函数 ψ。其本征方程

$$h\psi=\lambda\psi \qquad \lambda=\pm 1 \qquad (2.8-7)$$

n 的各分量在球坐标中表示为

$$n_1=\sin\theta\cos\varphi,\ n_2=\sin\theta\sin\varphi,\ n_3=\cos\theta$$

$$\sigma_n=\sigma\cdot n=\sigma_1 n_1+\sigma_2 n_2+\sigma_3 n_3$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi-i\sin\varphi) \\ \sin\theta\ (\cos\varphi+i\sin\varphi) & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{vmatrix} \qquad (2.8-8)$$

将（2.8−5）和（2.8−6）代入（2.8−7）得

$$\begin{vmatrix} \sigma\cdot n & 0 \\ 0 & \sigma\cdot n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}$$

对 $\lambda=1$，有 $\qquad \sigma\cdot n\xi=\xi,\quad \sigma\cdot n\eta=\eta \qquad (2.8-9)$

由上式第一式，有

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

即

$$\cos\theta u_1 + \sin\theta e^{-i\varphi} u_2 = u_1$$

$$\sin\theta e^{i\varphi} u_1 - \cos\theta u_2 = u_2$$

由上两式得同一比例式

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi}} \qquad (2.8-10)_1$$

同理，(2.8—9) 第二式解得

$$\frac{u^3}{u^4} = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi}} \qquad (2.8-10)_2$$

对 $\lambda = -1$，有

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

即

$$\cos\theta u_1 + \sin\theta e^{-i\varphi} u_2 = - u_1$$

$$\sin\theta e^{i\varphi} u_1 - \cos\theta u_2 = - u_2$$

用类似上面的讨论可得

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_3}{u_4} = \frac{-\sin\dfrac{\theta}{2} e^{-i\varphi}}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \qquad (2.8-11)$$

(2.8—10) 和 (2.8—11) 式是螺旋度本征方程（对应本征值±1）对 Dirac 方程的解的旋量分量的限制（要求）。

2. 能量本征态

下面讨论能量本征方程对 Dirac 方程的解的旋量分量的限制（要求）。能量本征方程

$$(\alpha \cdot p + \beta m)\psi = \varepsilon\psi$$

即

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & \sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} m\right]\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} = \varepsilon\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}$$

展开上式得

$$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon - m)\xi - (\sigma\cdot p)\eta = 0 \\ -(\sigma\cdot p)\xi + (\varepsilon + m)\eta = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.8-12)$$

上面齐次方程组有不为零解的条件是系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - m & -(\sigma\cdot p) \\ -(\sigma\cdot p) & \varepsilon + m \end{vmatrix} = 0$$

解得能量

$$\varepsilon = \pm\sqrt{P^2 + m^2} = E_\pm$$

由（2.8－12）解得

$$\eta = \frac{\sigma\cdot p}{\varepsilon + m}\xi \text{ 或 } \xi = \frac{\sigma\cdot p}{\varepsilon - m}\eta \qquad (2.8-13)$$

对正能（正频）$\varepsilon = E_+$，有

$$\eta = \frac{\sigma\cdot p}{E_+ + m}\xi \quad \text{或} \quad \xi = \frac{\sigma\cdot p}{E_+ - m}\eta \qquad (2.8-14)$$

对负能（负频）$\varepsilon = E_-$有

$$\eta = \frac{\sigma\cdot p}{E_- + m}\xi \text{ 或 } \xi = \frac{\sigma\cdot p}{E_- - m}\eta \qquad (2.8-15)$$

（2.8－14）和（2.8－15）是能量本征方程（本征值为$\pm E$）对 Dirac 方程平面波解的限制（要求）。由于螺旋度和能量（动量）有共同本征函数，故 Dirac 方程的平面波解应同时满足螺旋度本征方程和能量本征方程的要求，即可从（2.8－10）、（2.8－11）、（2.8－14）、（2.8－15）得到 Dirac 方程平面波解的显示表达式。

对 $\varepsilon = E_+$，$\lambda = 1$，由（2.8－10）$_1$ 式，选取 $u_1 = \cos\frac{\theta}{2}$，则 $u_2 = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$，于是

$$\xi = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{vmatrix}$$

由（2.8−6）可知，$\lambda=1$ 时 $\sigma\cdot p=|p|$（$\lambda=-1$ 时，$\sigma\cdot p=-|p|$）。我们可由（2.8−14）得到

$$\eta=\frac{\sigma\cdot p}{E_{+}+m}\xi=\frac{|p|}{E_{+}+m}\xi=\begin{vmatrix}\dfrac{|p|}{E_{+}+m}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \dfrac{|p|}{E_{+}+m}\sin\theta e^{i\varphi}\end{vmatrix}$$

3. 平面波解

联合上面的 ξ 和 η 得到 $\varepsilon=E_{+}$，$\lambda=1$ 的解（取 $E_{+}=E$，$E_{-}=-E$，以下同）：

$$\psi_{\mathrm{I}}=N\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi}\\ \dfrac{|p|}{E_{+}+m}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \dfrac{|p|}{E_{+}+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{vmatrix}e^{i(p\cdot x-E_{+}t)}=N\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi}\\ \dfrac{|p|}{E+m}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \dfrac{|p|}{E+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{vmatrix}e^{ipx}$$

(2.8 − 16)₁

用类似的方法可求得其余三个解

对 $\varepsilon=E_{+}=E$，$\lambda=-1$ 其解（注意用（2.8−11））

$$\psi_{\mathrm{II}}=N\begin{vmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\\ \dfrac{|p|}{E_{+}+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \dfrac{-|p|}{E_{+}+m}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{vmatrix}e^{i(p\cdot x-E_{+}t)}=N\begin{vmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\\ \dfrac{|p|}{E+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \dfrac{-|p|}{E+m}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{vmatrix}e^{ipx}$$

(2.8 − 16)₂

对 $\varepsilon=E_{-}=-E$，$\lambda=1$，其解

$$
\psi_{\mathrm{III}} = N \begin{pmatrix} \dfrac{|\boldsymbol{p}|}{E_- - m}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{|\boldsymbol{p}|}{E_- - m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_- t)}
$$

$$
= N \begin{pmatrix} \dfrac{-|\boldsymbol{p}|}{E+m}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{-|\boldsymbol{p}|}{E+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+Et)} \qquad (2.8-16)_3
$$

对 $\varepsilon = E_- = -E$，$\lambda = -1$，其解

$$
\psi_{\mathrm{IV}} = N \begin{pmatrix} \dfrac{|\boldsymbol{p}|}{E_- - m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \dfrac{-|\boldsymbol{p}|}{E_- - m}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_- t)}
$$

$$
= N \begin{pmatrix} \dfrac{-|\boldsymbol{p}|}{E+m}\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \dfrac{|\boldsymbol{p}|}{E+m}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+Et)} \qquad (2.8-16)_4
$$

其中 N 是归一化因子，可由 $\psi_{\mathrm{I}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{I}} = \psi_{\mathrm{II}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{II}} = \cdots = 1$求得

$$N = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}$$

当粒子运动动量 p 沿 z 轴 ($\theta=0$) 时，这时 $|\mathbf{p}|=p_3$，则 (2.8—16) 简写成

$$\psi_{\rm I} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_3}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipz}, \quad \psi_{\rm II} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{p_3}{E+m} \end{pmatrix} e^{ipz}$$

(2.8 — 17)

$$\psi_{\rm III} = N\begin{pmatrix} -\dfrac{p_3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(p\cdot x+Et)}, \quad \psi_{\rm IV} = N\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{p_3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(p\cdot x+Et)}$$

上面得到 Dirac 方程的四个解，分别对应于正、负能量态和正、负螺旋度（自旋在动量方同投影为正或负），读者可用相应的算符作用于相应的波函数上获得验证。

4. **负能困难**

上述解答中，粒子可以处于正能态，又可以处于负能态，这种负能解的存在，曾经是 Dirac 理论中的一个严重困难。因为这里的负能态和以往非相对论中所遇到的负能量有所不同，例如在中心力场中运动的电子，那里的负能量是由于选择势能的起点而产生，而这里的 E 是由爱因斯坦质能关系所规定的总能量，这样的负能就表示粒子的质量也可是负值，这是不能想象的。另外，按照量子力学对 ψ 的解释，负能解不可能有任何物理意义。例如，在原子中如果有负能级存在，那末所有原子都不可能有能量最低的基态，因为正能级的电子都可以跃迁到负能级而放出辐射。由于负能量可以有任意大的绝对值，因而所有电子都可能不断地无限

止地跳到更负的能级而放出能量，这与物理事实完全冲突。

为了避免这种跃迁到负能态所带来的困难，Dirac（1930）提出如下假设，在现实世界中，我们所说的真空状态是所有的负能态都被电子占满，根据泡里原理，如果一个态中已经有一个电子所占据，则其它电子就不可能跃迁到这个状态中去，所以我们观察到的正能量电子就不可能跳到已经填满了的负能态中。根据这个假设，真空中也有无穷多个电子填满了负能态，这些电子的存在，形成一个均匀的背景，正因为如此，它们不能被观察到。但是如果有一个负能态的电子被外来作用（如 γ 射线）所激发而跃迁到正能态，则原来的负能态中缺少了一个电子，形成一个所谓"空穴"，这个空穴相当于一个带正电具有正能量的粒子而被观察到。狄拉克的这种理论称为空穴理论。1932 年安德逊在宇宙射线实验中发现了正电子，于是空穴就自然地被理解为正电子。根据上述理论，光子和正负电子的相互转变得到了简单的解释：由于外来作用，使处在负能态的电子吸收了一个能量（$h\nu>2mc^2$）的光子后就被激发到正能态，从而形成一个负电子和一个正电子（空穴）；反之，当处于正能态的电子跳回到"空穴"时，正、负电子消失了，而放出光子，这过程称为正、负电子"湮没"。

但是，我们指出，狄拉克的空穴理论是根本违反客观事实的，因为根据这个理论，实际上没有电子存在的真空被看成了充满无穷个负能量的电子，这显然是荒谬的。其实狄拉克空穴理论的出现只表明在相对论量子理论里，把 ψ 解释为单个粒子的几率振幅是不可能的，而狄拉克理论实际上已放弃了单个粒子的概念，因为它已假定了无穷多个电子的海洋。在以后的量子场论中，人们对波函数作了新的解释，正负电子对的产生和湮没就成为理论上的一个自然现象，根本不再需要违反映客观实际的"空穴"理论了。

§ 2.9 Dirac 方程的解的正交归一性与完备性

Dirac 方程的四组解可改写成：

对正能解，由(2.8—16)$_1$，(2.8—16)$_2$有

$$\psi_{\rm I}(x) = u^{(1)}e^{ipx}, \qquad \psi_{\rm II} = u^{(2)}e^{ipx} \qquad (2.9-1)$$

对负能解，由(2.8—16)$_3$和(2.8—16)$_4$有（令 $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$，$|\boldsymbol{p}|\to-|\boldsymbol{p}|$）

$$\left.\begin{aligned}\psi_{\rm III}&\Rightarrow u^{(3)}(-p)e^{-ipx} = v^{(1)}(p)e^{-ipx}\\ \psi_{\rm IV}&\Rightarrow u^{(4)}(-p)e^{-ipx} = v^{(2)}(p)e^{-ipx}\end{aligned}\right\} \qquad (2.9-1)_2$$

其中 $u^{(r)}$，$v^{(r)}$（$r=1$，2），分别是（2.8—16）中所给出的旋量波函数。为书写方便，有时略去上标（r）。

1. **旋量波函数的正交归一性**

Dirac 方程及其共轭方程分别为

$$(i\hat{p}+m)u(p) = 0, \quad \bar{u}(p)(i\hat{p}+m) = 0 \qquad (2.9-2)$$

以 γ_4 左乘上式两边得

$$(i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+\gamma_4 m)\ u\ (p)\ = E\,u(p)$$

以 $\bar{u}$（p）左乘上式得

$$u^+\ (i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\ u = E\bar{u}u$$

对（2.8—19）第二式作类似运算得

$$u^+(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)u = E\bar{u}u$$

将上面两式相加得

$$mu^+u = E\bar{u}u \qquad (2.9-3)$$

另外，由负能粒子旋量波函数 v（p）、$\bar{v}$（p）满足

$$(-i\hat{p}+m)v(p) = 0, \quad \bar{v}(p)(-i\hat{p}+m) = 0 \qquad (2.9-4)$$

做同样运算得到

$$mv^+v = -E\bar{v}v \qquad (2.9-5)$$

考虑到 $\bar{u}\gamma_\mu u$，$\bar{v}\gamma_\mu v$ 都是实 4—矢量，故采取下面的归一化方案是合适的

$$i\bar{u}\gamma_\mu u = i\bar{v}\gamma_\mu v = \frac{p_\mu}{m}$$

由上式取 $\mu=4$ 时有

$$u^+u=v^+v=\frac{E}{m} \qquad (2.9-6)$$

联合 (2.9—3), (2.9—5) 和 (2.9—6) 得

$$\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 1 \qquad (2.9-7)$$

由于粒子和反粒子的不同自旋态都互相正交，所以

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}^{(r)}(p)\, u^{(s)}(p) = -\bar{v}^{(r)}(p)\, v^{(s)}(p) = \delta_{rs} \\
&\bar{u}^{(r)}(p)\, v^{(s)}(p) = \bar{v}^{(s)}(p)\, u^{(r)}(p) = 0 \\
&u^{(r)+}(p)\, u^{(s)}(p) = v^{(r)+}(p)\, v^{(s)}(p) = \frac{E}{m}\delta_{rs} \\
&u^{(r)+}(p)\, u^{(s)}(p) = v^{(r)+}(p)\, v^{(s)}(p) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.9-8)$$

2. 旋量波函数的完备性

因为旋量 $u^{(r)}$、$v^{(s)}$均为本征态，且互相正交归一，因此可用它们作为基矢，张成一个旋量 Hilbert 空间，空间中任一旋量 W 可展成这些旋量基矢的线性组合。即

$$W = \sum_{r=1}^{2}(a_r u^{(r)}(p) + b_r V^{(r)}(p)) \qquad (2.9-9)$$

其中 a_r, b_r 为任意常数，分别用 $\bar{u}^{(s)}(p)$ 和 $\bar{v}^{(s)}(p)$ 左乘上式两边得到

$$\bar{u}^{(s)}(p)W = \sum_{r=1}^{2}a_r\, \bar{u}^{(s)}(p)u^{(r)}(p) = \sum_{r=1}^{2}a_r\delta_{rs} = a_s$$

和
$$\bar{v}^{(s)}(p)W = \sum_{r=1}^{2}b_r\, \bar{v}^{(s)}(p)v^{(r)}(p) = -b_s$$

将 a_s, b_s 代入 (2.9—9) 得到

$$W = \sum_{r=1}^{2}(u^{(r)}(p)\,\bar{u}^{(r)}(p) - v^{(r)}(p)\,\bar{v}^{(r)}(p))W$$

由于 W 是任意旋量，故有

$$\sum_{r=1}^{2}u^{(r)}(p)\,\bar{u}^{(r)}(p) - v^{(r)}(p)\,\bar{v}^{(r)}(p) = 1 \quad (2.9-10)$$

上式就是旋量 $u^{(r)}$ 和 $v^{(r)}$ 的完备性条件。

3. 能量投影算符

为了今后计算的方便，我们引进两个正、负能量投影算符，它们分别记为

$$\Lambda_+(p)=\frac{-i\hat{p}+m}{2m} \text{和} \Lambda_-(p)=\frac{i\hat{p}+m}{2m} \quad (2.9-11)$$

利用 (2.9—2) 和 (2.9—4) 可以得到

$$\begin{aligned} &\Lambda_+(p)u(p)=u(p) \qquad &\Lambda_-(p)v(p)=v(p) \\ &\Lambda_-(p)\ u\ (p)\ =0 \qquad &\Lambda_+(p)\ v\ (p)\ =0 \end{aligned} \quad (2.9-12)$$

可见 Λ_+和 Λ_-分别投影出正能和负能旋量波函数，故分别称为正、负能量投影算符。

此外，由定义 (2.9—11) 可求得如下性质：

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_++\Lambda_-=1 \qquad &\Lambda_+\Lambda_-=\Lambda_-\Lambda_+=0 \\ &\Lambda_+^2=\Lambda_+ \qquad &\Lambda_-^2=\Lambda_- \end{aligned}\right\} \quad (2.9-13)$$

用 $\Lambda_+(p)$ 和 $\Lambda_-(p)$ 分别从左作用于完备性条件 (2.9—10) 得到

$$\Lambda_+(p)=\sum_{r=1}^{2}u^{(r)}(p)\bar{u}^{(r)}(p), \qquad \Lambda_-(p)=-\sum_{r=1}^{2}v^{(r)}(p)\bar{v}^{(r)}(p) \quad (2.9-14)$$

联合 (2.9—11) 和 (2.9—14) 得到正、负能投影算符

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_+&=\sum_{r=1}^{2}u^{(r)}(p)\bar{u}^{(r)}(p)=\frac{-i\hat{p}+m}{2m} \\ \Lambda_-&=-\sum_{r=1}^{2}v^{(r)}(p)\bar{v}^{(r)}(p)=\frac{i\hat{p}+m}{2m} \end{aligned}\right\} \quad (2.9-15)$$

上式在具体计算中是一个很有用的公式。

最后，若设 u 的归一化因子为 N，则由通常的归一化方法有

$$N^2u^+u=1$$

将 (2.9—6) 代入上式得归一化因子

$$N=\sqrt{\frac{m}{E}} \quad (2.9-16)$$

§2.10 二分量中微子理论

实验发现，除自旋为1的光子其静止质量 $m=0$外，自旋为$\frac{1}{2}$的中微子其静止质量也等零。这种粒子可用 $m=0$的 Dirac 方程来描述，这是1929年 Weyl 首先提出的。

1. **二分量旋量**

当 $m=0$时，Dirac 方程简化成

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\cdot\nabla\right)\psi=0 \qquad (2.10-1)$$

以平面波解

$$\psi=u(p)e^{ipx}$$

代入上式得

$$\alpha\cdot pu=\varepsilon u \qquad (2.10-2)$$

其中能量 $\varepsilon=\pm\sqrt{|p|^2+o^2}=\pm|p|$

由于 $m=0$，我们只需三个（而不是四个）反对称算符矩阵来描述， 这可由三个泡里矩阵来完成。相应地，将 u 写成

$$u=\begin{vmatrix}\xi\\ \eta\end{vmatrix} \qquad (2.10-3)$$

其中 ξ 和 η 都是二分量旋量，将（2.10－3）代入（2.10－2），得

$$\sigma\cdot p\eta=\varepsilon\xi,\qquad \sigma\cdot p\xi=\varepsilon\eta \qquad (2.10-4)$$

上式将二个旋量纠缠在一起，为得到二分量旋量独立方程，引进两个新旋量，这可由上面（2.10－4）中两个方程分别相加和相减得到。令

$$\varphi_+=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad \varphi_-=\frac{1}{2}(\xi-\eta) \qquad (2.10-5)$$

则有

$$\sigma\cdot p\varphi_+=\varepsilon\varphi_+,\ \sigma\cdot p\varphi_-=-\varepsilon\varphi_- \qquad (2.10-6)$$

利用螺旋度算符 $h=\frac{\sigma\cdot p}{|p|}$可将上式改写成

$$\left.\begin{aligned} h\varphi_{+}=\frac{\varepsilon}{|p|}\varphi_{+}=\begin{cases}\varphi_{+} & \varepsilon=|p| \\ -\varphi_{+} & \varepsilon=-|p|\end{cases} \\ h\varphi_{-}=-\frac{\varepsilon}{|p|}\varphi_{-}=\begin{cases}-\varphi_{-} & \varepsilon=|p| \\ \varphi_{-} & \varepsilon=-|p|\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (2.10-7)$$

可见，可用 φ_{+}，也可用 φ_{-}来描述二分量中微子。但根据 β 衰变实验，中微子的螺旋度为负（自旋与动量反平行），而反中微子的螺旋度为正（自旋与动量平行），如图2－1所示。因此，对正能量中微子应用 φ_{-}描述，称为左旋中微子，对正能量反中微子应用 φ_{+}描述，称为右旋反中微子。

由于 $\varphi_{\pm}$为二分量旋量，在 Dirac 方程的哈密顿量中只需用2×2 Pauli 矩阵，（2.10－1）可改写成

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\sigma\cdot\nabla\right)\varphi=0 \qquad (2.10-8)$$

其中 φ 是二分量旋量（φ_{+}或 φ_{-}），σ 是2×2 Pauli 矩阵。上式称为 Weyl 方程。

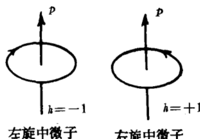


图 2－1

2. 宇称不守恒

在宇称变换 P（空间反射）下，$Px=-x$，$Pp=-p$　$P\sigma=\sigma$，$Pt=t$，方程（2.10－8）变成

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\sigma\cdot\nabla\right)(P\varphi)=0$$

显然，上式与原式不同，也就是说做宇称变换后的旋量 $P\varphi$ 不满足 Weyl 方程，即方程不具有宇称变换不变性。在这理论中，宇称不再是守恒量。这在相当长的时间内没有实验验证，因而，Weyl

的二分量中微子理论被人忽视。直至宇称在弱作用中不守恒的现象被发现后（杨振宁、李政道 1956），朗道（ландау 1957）以及 Salam（1957）就同时建议用这一理论描述中微子，并称为二分量中微子理论。

3. 用四分量旋量描述二分量中微子

二分量中微子理论也可用四分量 Dirac 旋量加上一个限制来描述。容易看出，Dirac 方程在变换 $\psi\to\gamma_5\psi$ 和 $m\to-m$ 下是不变的，故当 $m=0$时，$\gamma_5\psi$ 也是Dirac 方程的解。由 $\gamma_5^2=1$故有

$$\gamma_5\psi=\pm\psi \tag{2.10-9}$$

加上上述限制后，ψ 的独立变量实际上只有两个（读者可自已验证），记为

$$\psi=\begin{vmatrix}\varphi\\-\varphi\end{vmatrix}\quad \text{对 } \gamma_5\psi=\psi$$

或

$$\psi=\begin{vmatrix}\varphi\\\varphi\end{vmatrix}\quad \text{对 } \gamma_5\psi=-\psi$$

其中 φ 是二分量旋量。

将（2.10—9）代入 Dirac 方程

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\psi=\varepsilon\psi$$

得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi&=-\varepsilon\varphi,\quad \text{对 } \gamma_5\psi=\psi\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi&=\varepsilon\varphi,\quad \text{对 } \gamma_5\psi=-\psi\end{aligned} \tag{2.10-10}$$

可见，上式是二分量旋量的 Weyl 方程。第一个方程描述螺旋度为负的正能粒子（左旋中微子），第二个方程描述螺旋度为正的正能粒子（右旋反中微子）。比较（2.10—6）和上式，可见两者是一致的。

利用限制条件（2.10—9），方程（2.10—2）可写成

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\psi&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(1+\gamma_5)\psi=\varepsilon\psi\qquad \text{对 } \gamma_5\psi=\psi\\ (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\psi&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(1-\gamma_5)\psi=\varepsilon\psi\qquad \text{对 } \gamma_5\psi=-\psi\end{aligned}\right\} \tag{2.10-11}$$

由此可见下式也是 Dirac 方程的解

$$\left.\begin{aligned}\psi_L &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \qquad & \psi_R &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \\ \overline{\psi}_L &= \overline{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5) \qquad & \overline{\psi}_R &= \overline{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\end{aligned}\right\} \qquad (2.10-12)$$

另外，用 γ_5 左乘（2.10—11）第一式，可得

$$\gamma_5(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\psi = \varepsilon\gamma_5\psi \qquad (2.10-13)$$

其中

$$\gamma_5(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{p} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{p}$$

$$= -\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}$$

所以对 $\varepsilon=|\boldsymbol{p}|$，（2.1—13）写成

$$h\psi = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\psi = -\gamma_5\psi$$

即

$$h = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n} = -\gamma_5 \qquad (2.10-14)$$

于是

$$\left.\begin{aligned} h\psi_R &= -\gamma_5\frac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\,\psi = \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\,\psi = \psi_R \\ h\psi_L &= -\gamma_5\frac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\,\psi = -\frac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\,\psi = -\psi_L\end{aligned}\right\} \qquad (2.10-15)$$

上式表明，ψ_R 和 ψ_L 分别是螺旋度为正、负的旋量，我们可以用 ψ_L 描述左旋正能中微子(或右旋负能反中微子)。可以用 ψ_R 来描述右旋正能反中微子（或左旋负能中微子)。

第三章　经典场论

尽管经典场论不能对自然界做出完善的描述，但它在其本身范围内仍可解释许多现象。根据对应原理，常常可从经典理论导出量子理论的公式，同样，我们可从经典场论导出量子场论。这一章简述经典场论的一些普遍原理，对今后讨论量子场论将是直接有用的。

§3.1　最小作用量原理与场方程

1. 最小作用量原理

经典力学中有最小作用量原理：对任何力学体系，存在一个作用量积分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q})\mathrm{d}t \qquad (3.1-1)$$

对真实运动，上述积分取最小值，即它的变分

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i)\mathrm{d}t=0 \qquad (3.1-2)$$

其中 q、$\dot{q}$ 分别代表广义坐标和广义速度。由上式，注意到边界上变分 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$ 和 $\delta\dot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i)$ 立即可得到

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (3.1-3)$$

上式就是质点力学的 Lagrange 运动方程，在变分法中叫做欧拉方程。

2. 经典场方程

我们可以把经典力学的最小作用量原理（又称变分原理）移

植到波场系统，从而得经典场方程。经典场论中，常用多个独立场变量 $\varphi_\sigma(x)$ （$\sigma=1,2,3,\cdots n$）来描述（例如电磁场就用四个独立分量势 $A_1(x)$，$\cdots A_4(x)$ 作为场变量）。$\varphi_\sigma(x)$ 相当于力学体系的广义坐标，n 是每个时空点场物理量的数目。类似经典力学，对任何一个场的体系，假定存在 Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}$，它是 φ_σ 及其时空微商 $\partial_\mu\varphi_\sigma$ 的泛函，为使理论具有 Lorentz 协变性，$\mathscr{L}$ 应是一实标量函数。对封闭体系，$\mathscr{L}$ 应不是时空的显函数，以保证它在坐标平移下也保持不变。为使自由场满足迭加原理，自由场的 $\mathscr{L}$ 应不含二个以上 φ_σ 的乘积。为了简单，我们假定 $\mathscr{L}$ 不含 φ_σ 对时空的高级微商，于是有：

$$\mathscr{L}=\sum_{\sigma=1}^{n}\mathscr{L}(\varphi_\sigma,\partial_\mu\varphi_\sigma)$$

作用量 $I=\int_G \mathscr{L}\mathrm{d}^4x$

G 为场在四维空间中存在的范围，设场物理量作一微小变动

$$\varphi_\sigma(x)\rightarrow\varphi_\sigma(x)+\delta\varphi_\sigma(x)$$

并假设在 G 的边界上 $\delta\varphi_\sigma=0$，则由变分原理有：

$$\delta I=\int_G \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right\}=0 \quad (3.1-4)$$

注意到 $\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\varphi$* 和加减 $\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\right)\delta\varphi_\sigma$ 项，则上式可成

$$\begin{aligned}\delta I&=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\varphi_\sigma\right\}\\&=\int\mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)\right]\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\varphi_\sigma\right)\right\}\end{aligned}$$

---

* 这里由于坐标 x 没有改变，故可这样写，一般是 $\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\varphi_\sigma)+\left(\delta\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\varphi_\sigma$

$$= 0 \qquad (3.1-5)$$

上式中最后一项的积分利用四维空间的高斯定理

$$\int_G \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\mu} \mathrm{d}^4 x = \int_\sigma F_\mu \mathrm{d}\sigma_\mu \qquad (3.1-6)$$

可得

$$\int_G \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)\mathrm{d}^4 x = \int_\sigma \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)} \delta\varphi_\sigma \mathrm{d}\sigma_\mu$$

其中 $\mathrm{d}\varphi_\sigma$ 为四维空间的三维超曲面

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0 \quad \mathrm{d}\sigma_2 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0 \\ &\mathrm{d}\sigma_3 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_0 \quad \mathrm{d}\sigma_4 = \frac{1}{i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{1}{i}\mathrm{d}v \end{aligned}\right\} \qquad (3.1-7)$$

$\mathrm{d}x_0 = \mathrm{d}t$，$\sigma$ 为 G 的边界，由于边界上 $\delta\varphi_\sigma = 0$，所以上述积分为零，再改虑到积分区域和 $\delta\varphi_\sigma$ 的任意性，故由（3.1－5）得

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right) = 0^* \qquad (3.1-8)$$

上式称为拉格朗日场方程，简称为拉氏运动方程。从方程可见时间和空间处于对称位置，方程具有相对论协变形式。

3. Lagrange 密度函数的基本性质

拉格朗日密度函数 $\mathscr{L}$ 是描述系统的动力学性质的函数，就是说，只要给出系统的 Lagrange 函数，场系统的动力学就被确定，通过变分原理就可以确定场的运动方程（以后看到，还同时可以计算出场的能量、动量、角动量、电荷等守恒量）。当然变分原理并没有告诉我们如何选择基本的 Lagrange，选择基本的 Lagrange 是理论上更加物理的方面，而理论的数学部分只是获得和求解场方程。必须指出，系统的 Lagrange 函数不是唯一的。即使它加上一个散度项，仍然得到同样的场方程。因为加上一个散度项 $\partial_\mu \Lambda_\mu$

---

* 此式亦可由 $\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\sigma)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\varphi_\sigma\right\} = 0$ 对其中第二项用分部积分法，注意到界面上和 $t = t_1, t = t_2$ 时皆有 $\delta\varphi = 0$ 求得

后

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \partial_\mu \Lambda_\mu \tag{3.1-9}$$

这时

$$\delta\int_G \mathscr{L}' \, d^4x = \delta\int_G (\mathscr{L} + \partial_\mu \Lambda_\mu) d^4x$$
$$= \delta\int_G \mathscr{L} d^4x + \delta\int_G \partial_\mu \Lambda_\mu d^4x$$

上式右边第二项利用四维高斯定理可归结为一界面积分，即

$$\delta\int_G d^4x \partial_\mu \Lambda_\mu = \delta\int_\sigma \Lambda_\mu d\sigma_\mu$$
$$= \int_\sigma \left[\frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial(\partial_\mu \varphi_\sigma)}\delta(\partial_\mu \varphi_\sigma)\right] d\sigma_\mu$$
$$= \int_\sigma \left[\frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial(\partial_\nu \varphi_\sigma)}\partial_\nu(\delta\varphi_\sigma)\right] d\sigma_\mu = 0$$

上式最后一步用了在界面上变分 $\delta\varphi_\sigma=0$。

于是

$$\delta\int_G \mathscr{L}' \, d^4x = \delta\int_G \mathscr{L} d^4x \tag{3.1-10}$$

所以 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}+\partial_\mu \Lambda_\mu$ 代表同样的物理系统，导出同样的场方程（以及守恒量，不同的 $\mathscr{L}$ 之间相当于进行一次正则变换，不改变物理量的总数值）。最后，我们谈谈根据什么物理原则来选择系统的 Lagrange。总的来说应根据问题的对称性要求，选择尽可能简单的 Lagrange，一般必须满足如下几点要求：

（1）$\mathscr{L}$ 必须对固有 Lorentz 变换是一个不变量，即 Lorentz 标量，这样才能保证

a. 场方程对 Lorentz 变换是协变的。

b. 角动量守恒。

（2）$\mathscr{L}$ 对四维位移（displacement）变换是不变量，要求 $\mathscr{L}$ 不应是四维坐标 x_μ 的显函数。这才能保证能量动量守恒。

（3）$\mathscr{L}$ 必须是场函数和它的偏导数的二次齐式，这样才能保证：

a. 场的微分方程是线性的。

b. 电荷守恒，重子数、轻子数等守恒。

上面的要求，只是为我们寻找系统的 Lagrange 提供线索而

已。

§ 3.2 Noether 定理

在上一节中，我们看到如果场物理量做一微小连续变换

$$\varphi_\sigma(x) \to \varphi'_\sigma(x) = \varphi_\sigma(x) + \delta\varphi_\sigma(x)$$

体系的作用量不变（$\delta I = I' - I = 0$）那么就得到一个场物理量满足的运动方程——Lagrange 方程。这一节我们讨论更一般的情况。

1. Lagrange **不变性与作用量不变性**

首先，我们证明对于连续的坐标变换，Lagrange 函数的不变性与作用量不变性是等价的。设坐标作一无穷小连续变换

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$$

相应地场量也作一无穷小连续变换

$$\varphi_\sigma(x) \to \varphi'_\sigma(x') = \varphi_\sigma(x) + \delta\varphi_\sigma(x)$$

在这变换下，Lagrange 也作下列变换

$$\mathscr{L}(\varphi_\sigma(x), \partial_\mu\varphi_\sigma(x)) \to \mathscr{L}'(\varphi'_\sigma(x'), \partial'_\mu\varphi'_\sigma(x'))$$

根据 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 是 Lorentz 不变量的假设应有

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}'$$

按作用量的定义，原作用量

$$I = \int_\Omega \mathscr{L}(\varphi_\sigma(x), \partial_\mu\varphi_\sigma(x))\mathrm{d}^4x = \int_\Omega \mathscr{L}(x)\mathrm{d}^4x$$

变换后的作用量为

$$I' = \int_{\Omega'} \mathscr{L}'(\varphi'_\sigma(x'), \partial'_\mu\varphi'_\sigma(x'))\mathrm{d}^4x' = \int_\Omega \mathscr{L}(x')\mathrm{d}^4x'$$

在场论中所研究的变换、如固有 Lorentz 变换，位移变换以及位相变换等连续对称变换的 Jacobi 行列式

$$J = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \det a = 1$$

由（3.2－5）式有

$$I' = \int_\Omega \mathscr{L}'(x')\mathrm{d}^4x' = \int_\Omega \mathscr{L}'(x')J\mathrm{d}^4x = \int_\Omega \mathscr{L}'(x')\mathrm{d}^4x$$

可见，如果 $\mathscr{L}'(x')=\mathscr{L}(x)$，则有 $I'=I$。即若 $\delta\mathscr{L}=0$，则有 $\delta I=0$。

这就证明了在这种情况下，Lagrange 不变性和作用量不变性是等价的。可任选其一使用。

2. Noether **定理**

1935 年，Noether 提出一个著名的定理，其内容是：使作用量变分为零的任一连续对称坐标变换，对应存在一个守恒定律。这一守恒定律可用以确定守恒量。现在我们证明这一定理。

设坐标做无穷小变换，相应地场也作一变换，即

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \qquad (3.2-1)$$

$$\varphi_\sigma(x) \to \varphi'_\sigma(x') = \varphi_\sigma(x) + \delta\varphi_\sigma(x) \qquad (3.2-2)$$

设这是一连续对称变换，使得作用量变分

$$\delta I = \delta\int_G \mathscr{L}(x)\mathrm{d}^4x = 0 \qquad (3.2-3)$$

上式包含两部分内容，即由时空变换（3.2—1）引起位形时空区域的变化 $G\to G'$，于是 $\delta(\mathrm{d}^4x)=\mathrm{d}^4x'-\mathrm{d}^4x\neq 0$ 和由场量变换（3.2—2）引起的 Lagrange 函数变化 $\mathscr{L}(x)\to\mathscr{L}'(x')$，于是 $\delta\mathscr{L}(x)\to \mathscr{L}'(x)-\mathscr{L}(x)\neq 0$。

所以，（3.2—3）可成

$$\int_G \mathscr{L}\delta(\mathrm{d}^4x) + \int_G \delta\mathscr{L}(x)\mathrm{d}^4x = 0 \qquad (3.2-4)$$

其中 $\delta(\mathrm{d}^4x) = \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0\mathrm{d}(\delta x_1) + \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_0\mathrm{d}(\delta x_2) + \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}(\delta x_3) + \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}(\delta x_0)$

利用定义（3.1—7）式可得

$$\delta(\mathrm{d}^4x) = \mathrm{d}\sigma_\mu\mathrm{d}(\delta x_\mu)$$

式中 $\mathrm{d}\sigma_\mu$ 是四维时空中三维超曲面 σ 的面积元，δx_μ 代表超曲面边界上坐标的变化。我们可将（3.2—4）的第一项写成

$$\int_G \mathscr{L}(x)\mathrm{d}\sigma_\mu\mathrm{d}(\delta x_\mu) = \int_\sigma \mathscr{L}(x)\mathrm{d}\sigma_\mu\int_0^{\delta x_\mu}\mathrm{d}(\delta x_\mu)$$

$$= \int_\sigma \mathscr{L}(x)\mathrm{d}\sigma_\mu \delta x_\mu = \int_\Omega \partial_\mu(\mathscr{L}(x)\delta x_\mu)\mathrm{d}^4x \tag{3.2-5}$$

上式最后一步用了四维高斯定理。(3.2—4) 中第二项可写成

$$\int_\Omega \delta\mathscr{L}(x)\mathrm{d}^4x = \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta(\partial_\mu\varphi_\sigma)\right]\mathrm{d}^4x$$

$$= \int_\Omega \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\partial_\mu(\delta\varphi_\sigma)\right]\mathrm{d}^4x$$

$$= \int_\Omega \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma\right)\mathrm{d}^4x \tag{3.2-6}$$

上式第二步用了场方程 (3.1—8)。联合上面两式，得到

$$\int_\Omega \partial_\mu\left[\mathscr{L}(x)\delta x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma\right]\mathrm{d}^4x = 0$$

由于 d^4x 的任意性，故有

$$\partial_\mu\left[\mathscr{L}(x)\delta x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma\right] = \partial_\mu J_\mu = 0 \tag{3.2-7}$$

其中 $$J_\mu = \mathscr{L}(x)\delta x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma \tag{3.2-8}$$

(3.2—7) 是四维时空矢量 J_μ 的连续方程，是守恒定律的微分形式，J_μ 称为守恒流。将 (3.2—7) 式对空间体积元 d^3x 积分

$$\int_v \partial_\mu J_\mu \mathrm{d}^3x = \int_v(-i\partial_0 J_4 + \nabla\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}^3x$$

$$= \partial_0\left(-i\int_v J_4\mathrm{d}^3x\right) + \oint_s \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

最后一步用了三维高斯定理。考虑到场量在积分面边界上趋于零，上式第二项为零，最后得到

$$\partial_0\left(-i\int_v J_4\mathrm{d}^3x\right) = \partial_t G = 0 \tag{3.2-9}$$

其中 $$G = -i\int_v J_4\mathrm{d}^3x = 常数 \tag{3.2-10}$$

是不随时间改变的守恒量。J_4 和 G 写成

$$J_4 = \mathscr{L}\delta x_4 + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_4\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma \tag{3.2-11}$$

$$G = -i\int\left(\mathscr{L}\delta x_4 + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_4\varphi_\sigma)}\delta\varphi_\sigma\right)\mathrm{d}^3x \tag{3.2-12}$$

于是 Noether 定理得到证明。利用这一定理和（3.2—12）式，可写出各种场体系的守恒物理量。以下几节我们将分别进行讨论。

§3.3 时空平移与能量、动量守恒定律

由于时间和空间的均匀性使得“绝对时间”和“绝对空间位置”具有不可观察性，这就要求物理规律（运动方程）在四维坐标平移下具有不变性，即拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 在四维坐标平移下具有不变性。这将导出能量、动量守恒定律。假设在坐标作微量的平移时（有限的平移可由连续的微量平移构成），坐标和场物理量做如下的变换：

$$\left.\begin{aligned} x_\mu \rightarrow x'_\mu &= x_\mu + \varepsilon_\mu \\ \varphi_\sigma(x) \rightarrow \varphi'_\sigma(x') &= \varphi_\sigma(x + \varepsilon_\mu) \end{aligned}\right\} \tag{3.3-1}$$

其中 x' 和 φ' 代表新坐标系中的坐标和场量的数值，ε_μ 代表坐标的微量移动。

设拉氏函数密度对坐标平移具有不变性，则

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x'),\partial'_\mu\varphi'_\sigma(x')) - \mathscr{L}(\varphi_\sigma(x),\partial_\mu\varphi_\sigma(x)) \\ &= [\mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x'),\partial'_\mu\varphi'_\sigma(x')) - \mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x),\partial_\mu\varphi'_\sigma(x))] \\ &\quad + [\mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x),\partial_\mu\varphi'_\sigma(x)) - \mathscr{L}(\varphi_\sigma(x),\partial_\mu\varphi_\sigma(x))] = 0 \end{aligned} \tag{3.3-2}$$

上式第一个中括号是由于坐标变化而引起$\mathscr{L}$的变化，在忽略高级无穷小量时有

$$\mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x'),\partial'_\mu\varphi'_\sigma(x')) - \mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x),\partial_\mu\varphi'_\sigma(x)) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu$$

第二个中括号是由于场量变化（坐标不变）而引起 $\mathscr{L}$ 的变化，当忽略高级无穷小量时

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(\varphi'_\sigma(x),\partial_\mu\varphi'(x)) - \mathscr{L}(\varphi_\sigma(x),\partial_\mu\varphi_\sigma(x)) \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma(x)}\delta_0\varphi_\sigma(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma(x))}\delta_\mu(\partial_0\varphi_\sigma(x)) \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma(x)}\delta_0\varphi_\sigma(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma(x))}\partial_\mu(\delta_0\varphi_\sigma(x)) \end{aligned}$$

将上两式代入（3.3－2）得

$$\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta_0\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\partial_\mu(\delta_0\varphi_\sigma)$$

$$=0 \qquad (3.3-3)$$

其中变分符号 δ_0的下标“0”表示仅由场量变化引起，即

$$\delta_0\varphi_\sigma(x)=\varphi'_\sigma(x)-\varphi_\sigma(x)$$

由（3.3－1）式有

$$\delta x_\mu=x'_\mu-x_\mu=\varepsilon_\mu \qquad (3.3-4)$$

由于场量是张量（或旋量），按照前面关于张量的定义，在坐标平移变换下（此时 $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}=\delta_{\mu\nu}$）场量应不变，即

$$\varphi'_\sigma(x')=\varphi_\sigma(x)$$

由上式取一级微量近似有

$$\varphi'_\sigma(x')=\varphi_\sigma(x)=\varphi_\sigma(x'-\delta x)$$

$$=\varphi_\sigma(x')-\frac{\partial\varphi_\sigma(x')}{\partial x'_\mu}\delta x_\mu$$

移项，并将 $x'\to x$ 有

$$\delta_0\varphi_\sigma(x)=\varphi'_\sigma(x)-\varphi_\sigma(x)=-\delta x_\mu\partial_\mu\varphi_\sigma(x) \qquad (3.3-5)$$

将（3.3－4），（3.3－5）代入（3.3－3）得

$$\delta\mathscr{L}=\partial\frac{\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\varepsilon_\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\partial_\mu\varphi_\sigma\varepsilon_\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\sigma)}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_\sigma\varepsilon_\mu$$

$$=\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\sigma)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)-\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\sigma)}\right)\right]\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right\}\varepsilon_\mu$$

$$=0$$

利用 Lagrange 运动方程（3.1－8），上式中括号内函数等于零。考虑到 ε_μ 的任意性，并令

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\sigma)} \qquad (3.3-6)$$

则有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0 \qquad (3.3-7)$$

这是守恒定律的微分形式。根据 Noether 定理和公式（3.2－10），可得一守恒量

$$P_\mu=-i\int T_{\mu4}\mathrm{d}^3x \qquad (3.3-8)$$

上面给出的 $T_{\mu\nu}$ 和 p_μ 分别称为场的能量动量张量和场的能量动量四矢量。对任何场体系，只需知道它的拉氏密度函数 $\mathscr{L}$，则可由上面公式求得它的能量和动量，当 $\mu=1,\ 2,\ 3$ 时，得场的动量

$$P_i = -i\int T_{i4}\mathrm{d}^3x = -\int \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi_\sigma)}\mathrm{d}^3x \qquad (3.3-9)$$

当 $\mu=4$ 时得到场的能量

$$P_0 = -iP_4 = -\int T_{44}\mathrm{d}^3x = \int(\dot{\varphi}_\sigma\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma} - \mathscr{L})\mathrm{d}^3x$$

(3.3 − 10)

为了看出 P_μ 守恒的物理意义，我们把质点力学的正则形式和场的正则形式进行比较。

在质点力学中有广义动量 p_i、广义坐标 q_i 和拉格郎日函数的关系为

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}$$

定义质点的哈密顿 H 为

$$H = \sum_j p_j\dot{q}_j - L$$

仿质点力学，经典场论中，定义场的正则共轭动量密度 π_σ，场量 φ_σ 和拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 的关系为

$$\pi_\sigma = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}$$

类似质点力学，场的哈密顿密度为

$$\mathscr{H} = \pi_\sigma\dot{\varphi}_\sigma - \mathscr{L} \qquad (3.3-11)$$

哈密顿量（能量）

$$H = \int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x = \int\mathrm{d}^3x(\pi_\sigma\dot{\varphi}_\sigma - \mathscr{L}) \qquad (3.3-12)$$

这与上面（3.3—10）式所给出的守恒量 P_0 一致，所以 P_0 是代表场的能量。对于自由场，P_0 就是场的总能量。

§3.4 时空旋转变换与角动量守恒定律

由于空间的各向同性，使得"绝对的空间"方向具有不可观察性，这就要求物理规律（运动方程）在三维空间转动变换下具有不变性，即拉氏函数密度对三维空间转动变换应具有不变性。用与前节类似方法讨论，我们将看到，这对应三维空间角动量守恒定律。

三维空间转动变换是固有罗仑兹变换(四维空间转动变换)的特殊情况，下面我们以比较普遍的固有罗仑兹变换（因变换系数矩阵行列式等于+1，又称正 Lorentz 变换）进行讨论。因有限的固有 Lorentz 变换可由连续进行一系列无穷小的固有 Lorentz 变换得到，故我们讨论后者即可。对无穷小罗仑兹变换

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu$$

场物理量作相应的变换

$$\varphi_\sigma(x) \to \varphi'_\sigma(x') = \Lambda_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x) \qquad (3.4-2)$$

其中 μ、$\nu=1$，2，3，4；σ、$\rho=1$，2，3…n。

根据前面第二章§2.7的讨论，由（2.7—18）式有

$$\Lambda_{\sigma\rho}(\varepsilon_{\mu\nu}) = \delta_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\cdot S_{\mu\nu},_{\sigma\rho} \qquad (3.4-3)$$

并且 $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$，${}_{\mu\nu} = -{}_{\nu\mu}$ 都是反对称张量。以（3.4—3）代入（3.4—2）有

$$\begin{aligned}\varphi'_\sigma(x') &= \varphi_\sigma(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu},_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x) \\ &= \varphi_\sigma(x'_\mu - \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu},_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x) \\ &= \varphi_\sigma(x') - \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu(\partial'_\mu\varphi_\sigma(x')) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu},_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x) \qquad (3.4-4)\end{aligned}$$

将上式 $x' \to x$，考虑了 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 和 $[\varphi_\sigma(x') - \varphi_\sigma(x)]$ 均为一级微量，并忽略了高级微量，由上式可得：

$$\delta_0\varphi_\sigma(x) = \varphi'_\sigma(x) - \varphi_\sigma(x)$$

$$= -\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu(\partial_\mu\varphi_\sigma(x)) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho(x) \tag{3.4-5}$$

由（3.4－1）有

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu \tag{3.4-6}$$

设拉氏密度对固有 Lorentz 转动坐标变换保持不变，则经过类似上节的讨论，可得到类似上节（3.2－7）的表达式，即

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta_0\varphi_\sigma(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\partial_\lambda(\delta_0\varphi_\sigma(x)) \tag{3.4-7}$$

以（3.4－5）和（3.4－6）代入上式得：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\right)\\ &\quad - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)\partial}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\delta_\mu\nu_{,\sigma\rho}\varphi_\rho\right)\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.4-8}$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu) = \varepsilon_{\mu\mu} = 0$，（3.4－8）中第一项

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu = \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}x_\nu) \tag{3.4-9}$$

利用拉氏运动方程（3.4－8）中第二项

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\right)\left[\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\right]\end{aligned} \tag{3.4-10}$$

（3.4－9）的第三项可写成

$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda} \tag{3.4-11}$$

把（3.4－9）－（3.3－11）代入（3.4－8）得

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}x_\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\right\}\\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{x_\nu T_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\right)\right\} = 0\end{aligned} \tag{3.4-12}$$

注意到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 的反对称性，即有

$$\varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial_{x\lambda}}x_\nu T_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial_{x\lambda}}x_\nu T_{\mu\lambda}-\frac{\partial}{\partial_\lambda}x_\mu T_{\nu\lambda}\right)$$

将上式代入（3.4—12），考虑到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是任意取值，和 $S_{\mu\nu,\sigma\rho}$ 对 μ 和 ν 是反对称的，就有

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}M_{\mu\nu,\lambda}=0 \qquad (3.4-13)$$

其中 $$M_{\mu\nu,\lambda}=x_\nu T_{\mu\lambda}-x_\mu T_{\nu\lambda}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho$$

$$=L_{\mu\nu,\lambda}+S_{\mu\nu,\lambda} \qquad (3.4-14)$$

$M_{\mu\nu,\lambda}$ 为场的总动量矩张量，其中轨道动量矩张量

$$L_{\mu\nu,\lambda}=x_\nu T_{\mu\lambda}-x_\mu T_{\nu\lambda} \qquad (3.4-15)$$

自旋张量

$$S_{\mu\nu,\lambda}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho$$

$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma)}\cdot\frac{\partial\varphi_\sigma(\varepsilon_{\mu\nu})}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}} \qquad (3.4-16)$$

最后一步利用了

$$\varphi_\sigma(\varepsilon_{\mu\nu})=\Lambda_{\sigma\rho}\varphi_\rho=(\delta_{\sigma\rho}+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho})\varphi_\rho$$

$$\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}=S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho$$

场的守恒量是总角动量

$$M_{\mu\nu}=i\int M_{\mu\nu,4}\mathrm{d}^3x=i\int L_{\mu\nu,4}\mathrm{d}^3x+\int S_{\mu\nu,4}\mathrm{d}^3x$$

$$=L_{\mu\nu}+S_{\mu\nu}$$

其中 $$L_{\mu\nu}=i\int L_{\mu\nu,4}\mathrm{d}^3x=i\int(x_\nu T_{\mu4}-x_\mu T_{\nu4})\mathrm{d}^3x \qquad (3.4-17)$$

是场的二阶轨道动量矩，

$$S_{\mu\nu}=i\int S_{\mu\nu,4}\mathrm{d}^3x=-\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho\mathrm{d}^3x$$

$$=-\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}\mathrm{d}^3x \qquad (3.4-18)$$

是场的自旋动量矩，只有总动量矩 $M_{\mu\nu}$ 才是守恒量。$M_{\mu\nu}$ 有6个分量，其中 μ，ν 不等于4的三个分量 M_{ij}（i，$j=1$，2，3）代表场的总角动量。

$$M_{ij} = L_{ij} + S_{ij}$$

其中

$$L_{ij} = i\int (x_j T_{i4} - x_i T_{j4})\mathrm{d}^3x \qquad (3.4-19)$$

是场的三维空间的轨道角动量

$$S_{ij} = i\int S_{ij4}\mathrm{d}^3x = i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\sigma} S_{ij,\sigma\rho}\varphi_\rho \mathrm{d}^3x$$

$$= i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma(\varepsilon_{\mu\nu})}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\mathrm{d}^3x \qquad (3.4-20)$$

是场的内部空间的自旋角动量。

最后必须指出：除了用这两节所述通过变分的方法求出守恒定律和相应的守恒量外，我们也可以直接利用 Noether 定理所给出的守恒量公式（3.2－12）求得守恒量和守恒定律，此时只需求出在坐标变化下，场量 φ_σ 的变分 $\delta\varphi_\sigma$，代入（3.2－12），通过适当的运算得到。

§ 3.5　第一规范变换与电荷守恒定律

由于带不同电荷的态间的相对位相的不可观察性，使得运动规律（运动方程）在场物理量作位相变换时具有不变性，也就是拉氏函数密度在场量作位相变换下具有不变性，这就导致电荷守恒定律，这种位相变换称为第一规范变换。一般情况下，场是由复函数来描述的，也就是用 φ 和 φ^* 表示，它们都是独立变量，那么拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 将是 φ、φ^*、$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$ 和 $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}$ 的函数，用变分法得到的拉氏运动方程应是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\sigma)}=0\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\sigma)}=0
\end{aligned}\right\}
\qquad (3.5-1)
$$

泡里（Pauli，1940）定义下列的相变换

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_\sigma(x)\to\varphi'_\sigma(x)=e^{i\alpha}\varphi_\sigma(x)\\
\varphi_\sigma^*(x)\to\varphi_\sigma^*(x)=e^{-i\alpha}\varphi_\sigma^*(x)
\end{aligned}\right\}
\qquad (3.5-2)
$$

为第一规范变换，其中 α 是一实常数。

仿前两节的讨论，$\mathscr{L}$ 对变换（3.4－2）的不变性可表示为：

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}=&\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\delta(\partial_\mu\varphi_\sigma)\\
&+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma^*}\delta\varphi_\sigma^*+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma^*)}\delta(\partial_\mu\varphi_\sigma^*)=0
\end{aligned}
\qquad (3.5-3)
$$

设 α 是很小的实常数，则有

$$
\left.\begin{aligned}
\delta\varphi_\sigma=e^{i\alpha}\varphi_\sigma-\varphi'_\sigma\cong i\alpha\varphi_\sigma\\
\delta\varphi_\sigma^*=e^{-i\alpha}\varphi_\sigma^*-\varphi_\sigma^*\cong-i\alpha\varphi_\sigma^*
\end{aligned}\right\}
\qquad (3.5-4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\varphi_\sigma)=i\alpha\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\\
\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\varphi_\sigma^*)=-i\alpha\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}
\end{aligned}\right\}
\qquad (3.5-5)
$$

（3.5－4）和（3.5－5）代入（3.5－3）得

$$
i\alpha\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma^*}\varphi_\sigma^*-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right\}=0
\qquad (3.5-6)
$$

利用运动方程（3.5－1）可将上式写成：

$$
i\frac{\partial}{\partial_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma^*\right\}=0
\qquad (3.5-7)
$$

以 e（基本粒子的电荷）乘上式，上式写成

$$
\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0
\qquad (3.5-8)
$$

其中 $J_\mu = -ie\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma^*\right\}$ (3.5－9)

(3.5－8) 具有守恒定律的微分形式，其守恒量为

$$Q = -i\int J_4 d^3x = \int \rho d^3x \qquad (3.5-10)$$

这个守恒量 Q 称为电荷，$\rho = -iJ_4$ 称为电荷密度。从 (3.5－9) 的形式可看出，若场函数为实函数或纯虚函数时，则电流密度向量和电荷密度皆为零 ($J_\mu = 0$)。因此，实函数场或纯虚的函数场只能描述中性基本粒子，而复数场才能描述带电粒子。我们指出，轻子的场函数或重子的场函数的拉氏函数对第一类规范（位相变换）的不变性，对应着轻子数或重子数守恒，因此，上述方法可用来讨论粒子数守恒和其它荷守恒。电荷守恒只是一个特例。

第四章　场量子化概述

在这一章，我们简述场量子化的概念和一般方法，为以后几章讨论各种自由场的量子化打下基础。

§4.1　场量子化的物理基础

首先，物质的波一粒二象性，已为大量事实所证实。例如光电效应和 Compton 散射表明电磁场除具有波动性外，还具有粒子性；电子衍射的戴维孙一革末实验表明电子除有粒子性外，还具有波动性。但是以往的理论，无论是相对论电磁场理论，还是量子力学的电子理论都无法把物质的这种波一粒二象性统一起来描述。

其次，大量高能物理实验已经证实粒子之间相互转化的存在。也就是说，所研究的粒子体系，粒子的数目是经常改变的。Dirac 的相对论量子力学也只能处理粒子数保持不变的体系，而不能反映粒子的产生和湮灭的基本物理过程。即使是原子的自动发光或者粒子自动衰变这样简单的物理过程，量子力学也无能为力。场量子化之后，就能自动地描述粒子的产生和湮灭。

第三，无论是场还是粒子，其物理量都是通过相互作用来观测的，例如电磁场的强度是通过荷电粒子的动量改变来观测。我们已经知道电子的动量和位置满足测不准关系，并且电子和电磁场相互作用时其总动量守恒。因此，为保持理论内部的协调，电磁场的动量能量和空间位置也应存在测不准关系，以致场强之间也存在测不准关系。其它场也应满足相应的测不准关系。这已得到实验支持。只有量子化的场才能反映场的测不准关系。

综上所述，无论是波场还是粒子，都应该用量子化的场来描

述，才能正确反映客观事实。

§4.2 二次量子化

通常，人们认为量子力学统一了波和粒子的二象性。其实，对实物粒子(如电子)和光来说，两种统一方式是不同的。对实物粒子是用波函数 ψ 来描述它的态，所谓波动性就是粒子几率分布上的波动性(ψ 是几率波函数)；而对光波来说，它的波动性就是光波的连续传播性，而它的粒子性也只是能量的不连续性。因此，在量子力学里，还没有真正把实物粒子和光波进行统一的描述。在 1927－1928 年间，约旦－克来因(Jordan1927)和约旦－维格纳(Jordan1928)先后创立了玻色子和费米子的二次量子化方法，使得实物粒子也可用算符 ψ 来描述，消除了以上两种不同的描述方式，使场和粒子的对比进一步密切起来。二次量子化方法是研究全同粒子组成的多粒子体系的一种常用方法，这种方法的要点是用处在一个状态中粒子数目来描写体系的状态，也就是把多粒子体系的问题由原来的表象(如坐标表象或能量表象)变换到粒子数表象中去讨论。因此，所谓二次量子化方法，并不意味着客体存在新的第二次量子效应，而只是一种表象变换方法。关于二次量子化方法在一般的量子力学书中有讨论。这里，我们着重指出，上述的二次量子化方法的结果，也可以用下述方法来实现：把单粒子的薛定格方程中的波函数不看成是几率波，而看成是类似于电磁场的一种古典场，并把它按照力学量的完全集合的本征函数展开：

$$\psi(x)=\sum_k a_k\varphi_k(x) \qquad (4.2-1)$$

由于 $\psi(x)$ 本身是一个复数，故上式右边不再加复数共轭项。现在我们把 a_k 不再看成是普通的数，而是满足一定的对易关系的算符。

1. 玻色子量子化

对玻色子用对易关系的量子化条件，即

$$
\begin{aligned}
&[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'} \\
&[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0
\end{aligned}
\tag{4.2-2}
$$

为了简单，我们只讨论一个固定 k 的态(以下同)，这时(4.2－2)变成

$$
[a, a^*] = 1 \quad , [a, a] = [a^*, a^*] = 0
$$

引进粒子占有数算符 $N = a^* a$，N 的本征值 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 等正整数．并写成对角矩阵

$$
N = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
\tag{4.2-3}
$$

在这个表象中 a^* 和 a 可表示为

$$
a^* = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots \\
\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix},
$$

$$
a = \begin{vmatrix}
0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
\tag{4.2-4}
$$

下面，我们解释 N、a 和 a^* 的物理意义。以 $|n>$ 表示算符 N 的本征态，则

$$
N|n> = n|N>
\tag{4.2-5}
$$

故 N 可解释为粒子数算符。以 n' 代表行的数目，n 代表列的数目(n' 和 n 都从 0 开始)，由(4.2－4)式可写出矩阵元

$$
< n' |a| n > = a_{n'n} = \sqrt{n}\, \delta_{n', n-1}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= \sqrt{n} < n' | n - 1 > \\
< n' | \cdots > &= a^*_{n'n} = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} \\
&= \sqrt{n+1} < n' | n + 1 >
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2-6)
$$

上式最后一步用了态的正交性质。对比上式两边，立即得到

$$
a|n> = \sqrt{n}\,|n-1>, \quad a^*|n> = \sqrt{n+1}\,|n+1> \qquad (4.2-7)
$$

并且有

$$
N|n> = a^*a|n> = \sqrt{n}\,a^*|n-1> = n|n> \qquad (4.2-8)
$$

可证

$$
Na|n> = (n-1)a|n>, \quad Na^*|n> = (n+1)a^*|n> \qquad (4.2-9)
$$

可见 $a|n\rangle$ 和 $a^*|n\rangle$ 分别为 $(n-1)$ 和 $(n+1)$ 个粒子的本征态。所以称 a 为消灭一个粒子算符，a^* 为产生一个粒子的算符。

从上面可以看到，对玻色子，$n=0、1、2\cdots$ 表示同一态的粒子数没有限制，量子化条件可用对易关系式描述。

2. **费米子量子化**

按照 Pauli 不相容原理，对费米子，同一量子态的粒子数只能为 0 或 1，所以不能用上述对易关系做为量子化条件。约旦和维格纳建议对费米子的量子化条件改用反对易关系：

$$
\left.\begin{aligned}
&[a_k, a^*_{k'}]_+ = a_k a^*_{k'} + a^*_{k'} a_k = \delta_{kk'} \\
&[a_k, a_{k'}]_+ = [a^*_k, a^*_{k'}]_+ = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2-10)
$$

可以证明上述反易关系满足泡里原理。因为由上式

$$
\begin{aligned}
N_k^2 &= (a^*_k a_k)^2 = a^*_k a_k a^*_k a_k \\
&= a^*_k (1 - a^*_k a_k) a_k = a^*_k a_k = N_k
\end{aligned}
$$

由此得本征值的代数方程

$$
n_k^2 = n_k
$$

这个方程的根为 $n_k=1$ 或 0，即处在 k 态的粒子数只为 1 或 0 个，服从泡里原理。

现在我们写出 N_k、a_k^*、a_k 的显示式，并说明它们的意义。为简便我们只考虑一个固定的 k 态，因而略去下标 k 不写，我们有：

$$\left.\begin{aligned} aa^* + a^*a &= 1 \\ a^2 = a^{*2} &= 0 \\ N &= a^*a \end{aligned}\right\} \quad (4.2-11)$$

因为 N 的本征值为 0 和 1，故可写成对角矩阵

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.2-12)$$

由于 a 和 a^* 要满足(4.2—10)、(4.2—11)，故可写成

$$a = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad a^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.2-13)$$

又因 N 的本征值只有 0 和 1，故两个可能的本征矢可记为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，而 N 作用于 $|0\rangle$ 的本征值为 0，作用 $|1\rangle$ 的本征值为 1，故可将 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示为

$$|0> = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad |1> = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4.2-14)$$

由上两式可得

$$\left.\begin{aligned} a|n> &= n|1-n> \\ a^*|n> &= (1-n)|1-n> \end{aligned} \quad n = 0,1 \right\} \quad (4.2-15)$$

可见 a^* 和 a 仍起着产生和消灭算符的作用。

由于 a 和 a^* 是算符，故 ψ 和 ψ^* 也是算符。利用(4.2—1)可将对易关系(4.2—2)和(4.2—10)改写成：

玻色子
$$\left.\begin{aligned} [\psi(x), \psi^*(x')] &= \delta(x-x') \\ [\psi(x), \psi(x')] &= [\psi^*(x), \psi^*(x')] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.2-16)$$

费米子
$$\left.\begin{aligned} [\psi(x), \psi^*(x')]_+ &= \delta(x-x') \\ [\psi(x), \psi(x')]_+ &= [\psi^*(x), \psi^*(x')]_+ = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.2-17)$$

因为 $\psi(x)$ 原来是经历了一次量子化之后的波函数，现在又把它看成算符，就是第二次量子化，这是二次量子化名称的来由。正如前面所指出的，这样做是等效于表象变换，绝不是表明客观上存在二次量子效应。

3. **物质场的量子化**

在第二章，我们曾经把非相对论量子力学推广到相对论领域，得到描述实物粒子的克来因—戈登方程和狄拉克方程。当时，我们保留了波函数 φ(或 ψ)的几率解释，因而导致负几率和负能量的困难。产生上述困难的原因是：在量子力学中关于波函数的几率解释是以几率守恒为条件的，而几率守恒的物理实质是粒子数守恒。但在高速相对论情况下，粒子数目是不守恒的，这一矛盾是产生困难的根本原因。因此，我们在相对论的情况下，应将波函数的几率意义进行改革。我们把 Klein－Gorden 方程和 Dirac 方程

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi &= 0 \\
(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi &= 0
\end{aligned}
\qquad (4.2-18)
$$

不看成是单粒子的运动方程，而看成是和 Maxwell 方程 $\partial_\mu^2 A=0$ 相当的古典场方程，并按照二次量子化方法进行量子化，把 φ 和 ψ 分别看成场算符，并根据粒子所遵从的统计法则，引进量子化条件(对玻色子引进对易关系，对费米子引进反对易关系)，这就是对物质场进行量子化。对电磁场 A 也是采用同样的量子化方法，这样不但不存在上述困难，而且使实物粒子和光子完全处于同等地位。也就是说，量子场的概念把光和实物，波和粒子的对立完全统一起来。我们看到，当我们解决了场和实物的对立之后，就遇到一个新的对立，也就是两种统计法则的对立，解决这一对立将会使我们对物质结构的认识深入一步。

§4.3 场量子化的正则形式

关于量子场论的建立方式，通常采用拉氏形式或哈密顿正则形式。拉氏形式比较直接而又有相对论不变性的优点；而正则形式，由于时间 t 独立出来，使得和空间坐标 x 处于不对称的位置，故不很适宜于相对性量子场论。但正则形式可以和量子力学的正则形式相对比，容易掌握它的具体内容，因此我们将采用这种形式。

1. **古典质点力学和量子力学的正则形式**

在研究如何将场量子化的时候，人们自然会想到，如何将古典力学过渡到量子力学的方法加以扩充，然后用到场的量子化问题上去。海森堡发现的从古典力学过渡到量子力学的量子化方法如下：

(1)首先将古典力学纳入正则形式

在分析力学里，有 n 个自由度的弧立系或保守系的拉格朗日函数 L 不是时间 t 的显函数，因运动方程最高为二次微商，故假设 L 与广义坐标 q 的高次微商无关，即

$$L(q_j,\dot{q}_j) = L(q_1\dot{q}_1,q_2\dot{q}_2\cdots q_n\dot{q}_n) \qquad (4.3-1)$$

应用变分原理

$$\left.\begin{aligned}\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_j,\dot{q}_j)dt = 0\\ \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (4.3-2)$$

可导出拉格朗日(Lagrange)运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1,2,\cdots n \qquad (4.3-3)$$

令

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad (4.3-4)$$

为广义坐标 q_j 的共轭动量(正则动量)，并且定义质点系的哈密顿(Hamiltion)函数为

$$H(q_jp_j) = \sum_j p_j\dot{q}_j - L \qquad (4.3-5)$$

由拉氏方程(4.3－3)和 H 的定义(4.3－5)可推得正则运动方程。

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (4.3-6)$$

推导如下：

由(4.3－1)和(4.3－5)得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_p = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_q\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)_p = p_j\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right)_p - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_p$$

利用上式和(4.3－4)，(4.3－3)得

$$(\frac{\partial H}{\partial q_i})_p = -(\frac{\partial L}{\partial q_i})_{\dot q} = -\dot p_i$$

类似地有

$$(\frac{\partial H}{\partial p_i})_q = \dot q_i + p_j(\frac{\partial \dot q_j}{\partial p_i})_q - (\frac{\partial L}{\partial \dot q_j})_q(\frac{\partial \dot q_j}{\partial p_i})_q = \dot q_i$$

若有一力学量 $F(q_ip_i)$，它不是时间 t 的显函数，利用正则方程可推得

$$\dot F(q_i, p_i) = \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot p_j = \left\{\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right\} \quad (4.3-7)$$

上式右边的求和项可用泊松括号$\{H,F\}$来表示，即

$$\dot F = \{H, F\} \quad (4.3-8)$$

显然 $\dot H=0$(H 是系统的能量)，表示系统的能量守恒。

(2)从古典力学的正则形式过渡到量子力学

把实数的力学量都用相应的厄米算符代表，并令共轭正则变量服从如下对易关系：

$$\left.\begin{aligned}[q_j, p_{j'}] &= i\delta_{jj'} \\ [q_j, q_{j'}] &= [p_j, p_{j'}] = 0\end{aligned}\right\} \quad (4.3-9)$$

利用上式可证：

$$[q_k^n, p_k] = inq_k^{n-1} = i\frac{\partial q_k^n}{\partial q_k}$$

$$[p_k^n, q_k] = -inp_k^{n-1} = -i\frac{\partial p_k^n}{\partial p_k}$$

一般地有

$$[A(p_k, q_k), p_k] = i\frac{\partial A}{\partial q_k}$$

$$[A(p_k, q_k), q_k] = -i\frac{\partial A}{\partial p_k}$$

令 $A=H$ 则有

$$[H, q_k] = -i\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad [H, p_k] = i\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (4.3-10)$$

将经典正则方程中的量看成算符，得量子正则方程

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (4.3-11)$$

联合上面两式得正则形式的量子运动方程

$$\dot{q}_k = i[H, q_k] \qquad \dot{p}_k = i[H, p_k] \qquad (4.3-12)$$

对任意的不显含时间的物理量 $F(q_j p_j)$，可由上式推出其量子运动方程为：

$$\dot{F} = i[H, F] \qquad (4.3-13)$$

若 $[H, F] = 0$，则 F 为守恒量，这是海森堡表象中守恒定律的表示式。显然，哈密顿算符 H(系统的能量算符)是一个守恒量。

2. **古典场的正则形式**

前面我们已经看到，由 n 个场量

$$\psi_\sigma(x) \qquad \sigma = 1, 2 \cdots n$$

描写的场，其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(\psi_\sigma, \partial_\mu \psi_\sigma) \qquad (4.3-14)$$

场的拉格朗日运动方程为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\sigma)}\right) = 0 \qquad (4.3-15)$$

其中 σ 可以代表一种场的一个分量，例如电磁场 $A(x)$ 有 4 个分量；也可表示不同种类的场。$\mathscr{L}$ 是 ψ_σ 和 $\partial_\mu \psi_\sigma$ 的函数，这已考虑到场不但随 t 连续变化，而且随 x 连续变化。

以上是古典场的拉氏形式。我们注意到，场的拉氏形式的运动方程(4.3—15)与质点力学的拉格朗日方程(4.3—3)不完全相似。为了使场和质点更加类似，以便仿照质点力学量子化的方法进行场的量子化，我们讨论场的哈密顿正则形式。首先，我们注意到场变量 $\psi_\sigma(x)$ 与质点系的广义坐标 $q_j(t)$ 是有区别的，前者是空间坐标和时间坐标的函数，后者只是时间的函数。但是，如果我们将 $\psi_\sigma(x)$ 中的空间连续变量 x 与质点系的广义坐标 $q_j(t)$ 的分裂指标相对应，那么 $\psi_\sigma(x)$ 和 $q_j(t)$ 相似。因而可把场看成是具有无穷多个自由度的质点系。为使这种类似性更进一步，我们将场分成无数个小元格 Δv，第 s 个小元格的体积为 $\Delta v^{(s)}$，在这个小元格中，时间为

t时的 ψ_σ、$\partial_\mu\psi_\sigma$ 的平均值分别用 $\psi_\sigma^{(s)}$ 和 $\partial_\mu\psi_\sigma^{(s)}$ 来表示，则场的拉格朗日为

$$L = \sum_{(s)} L^{(s)} \Delta v^{(s)}$$

$$L^{(s)} = L(\psi_\sigma^{(s)}, \partial_\mu \psi_\sigma^{(s)})$$

为过渡到场的正则形式，我们先定义和场变量 $\psi(x)$ 共轭的正则动量密度为

$$\pi_\sigma(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\sigma} \qquad (4.3-16)$$

令在第 s 个小元格中 π_σ 的平均值为 $\pi_\sigma^{(s)}$，则 π_σ 的共轭正则动量为

$$p_\sigma^{(s)} = \pi_\sigma^{(s)} \Delta v^{(s)}$$

类似质点力学的哈密顿 $H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L$，我们得到场的哈密顿为

$$H = \sum_{(s)} p_\sigma^{(s)} \dot{\psi}_\sigma^{(s)} - L = \sum_{(s)} (\pi_\sigma^{(s)} \dot{\psi}_\sigma^{(s)} - \mathscr{L}^{(s)}) \Delta v^{(s)}$$

令 $\Delta v^{(s)} \to 0$，则上式过渡到连续的极限情况，此时场的哈密顿可表示成体积分

$$H = \int \mathscr{H} d^3 x \qquad (4.3-17)$$

其中

$$\mathscr{H} = \pi_\sigma \dot{\psi}_\sigma - \mathscr{L} \qquad (4.3-18)$$

称为场的哈密顿密度，借助(4.3—16)式可将 $\mathscr{L}$ 中的 $\dot{\psi}_\sigma$ 消去，故 $\mathscr{H}$ 可视为 ψ_σ、$\nabla\psi_\sigma$ 和 π_σ 的函数：

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(\psi_\sigma \nabla \psi_\sigma \pi_\sigma)$$

引进场的哈密顿 H 后，可以求得场的正则方程*

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_\sigma^{(s)} &= \frac{\partial H}{\partial p_\sigma^{(s)}} \\ \dot{p}_\sigma^{(s)} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi_\sigma^{(s)}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3-19)$$

上式和质点力学的正则方程相似，是古典场的正则运动方程。

3. 场量子化的正则形式

从上面可以明显看出，场的小元格中的平均值 $\psi_\sigma^{(s)}$ 和 $p_\sigma^{(s)}$ 与

---

* 参考：朱洪元　量子场论　科学出版社 1960. P.22

质点力学的广义坐标 q_j 和动量 p_j 相类似，因此，可以把质点力学的量子化方法推广到场的量子化中去。仿质点力学的量子化方法，我们将古典场量 $\psi_\sigma^{(s)}$ 和 $p_\sigma^{(s)}$ 认为是算符，并令这些算符遵守量子力学中的对易关系，即：

$$\left.\begin{aligned}[\psi_\sigma^{(s)}, p_{\sigma'}^{(s')}] &= i\delta_{ss'}\delta_{\sigma\sigma'} \\ [\psi_\sigma^{(s)}, \psi_{\sigma'}^{(s')}] &= [p_\sigma^{(s)}, p_{\sigma'}^{(s')}] = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.3-20}$$

当小元格是无限小时，上面的对易关系可过渡为用 ψ_σ 及 π_σ 来表示（同时间的对易关系）

$$\left.\begin{aligned}[\psi_\sigma(x,t), \pi_{\sigma'}(x',t)] &= i\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x,x') \\ [\psi_\sigma(x,t), \psi_{\sigma'}(x',t)] &= [\pi_\sigma(x,t), \pi_{\sigma'}(x',t)] = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.3-21}$$

上面的记号

$$\delta(x,x') \equiv \frac{\delta_{ss'}}{\Delta v^{(s')}}$$

当 x 和 x' 在同一小元格内，则 $\delta_{ss'}=1$，否则，$\delta_{ss'}=0$，故当小元格的体积 $\Delta v^{(s)} \to 0$ 的极限时，$\delta(x,x')$ 可用三维的狄拉克函数 $\delta(x-x')$ 来代替，于是场量子化遵循如下对易关系

$$\left.\begin{aligned}[\psi_\sigma(x,t), \psi_{\sigma'}(x'.t)] &= i\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x-x') \\ [\psi_\sigma(x,t), \psi_{\sigma'}(x',t)] &= [\pi_\sigma(x,t), \pi_{\sigma'}(x',t)] = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.3-22}$$

场的哈密顿算符为

$$\left.\begin{aligned}H &= \int \mathscr{H}(\psi_\sigma, \nabla\psi_\sigma, \pi_\sigma) d^3x \\ \mathscr{H} &= \pi_\sigma\dot{\psi}_\sigma - \mathscr{L}\end{aligned}\right\} \tag{4.3-23}$$

类似质点力学(4.3－11)和(4.3－12)式，我们得量子场的海森堡运动方程

$$\dot{\psi}_\sigma = i[H, \psi_\sigma], \qquad \dot{\pi}_\sigma = i[H, \pi_\sigma] \tag{4.3-24}$$

和

$$\dot{F}(\psi_\sigma, \pi_\sigma) = i[H, F] \tag{4.3-25}$$

如果将 H 和 F 均表示为 ψ_σ 和 π_σ 的函数，则上式的对易括号可以藉助对易关系(4.3－22)算出。所以，对易关系(4.3－20)和量子运

动方程(4.3－24)可作为场量子化的基本方程。但应注意，对易关系(4.3－22)只是对玻色粒子场才是正确的，对费米粒子场必须改成反对易关系。

第五章　标量场量子化

各种基本粒子具有一系列基本性质，如质量、电荷、自旋、宇称等等。就自旋而论，目前所发现的基本粒子可分为三类：第一类是自旋为零的基本粒子，如 π 介子、K 介子等；第二类是自旋为$\frac{1}{2}$的基本粒子，如轻子和重子，我们又称为费米子；第三类是自旋为 1 的基本粒子，如光子、中间玻色子。从理论上的数学形式来看，对自旋为零的粒子，可以用只有一个分量的标量场来描写。对自旋不为零的粒子，它们还有一个自旋自由度，因此不能用只具有一个分量的标量场来描写。对自旋为 1 的粒子，应用矢量场来描写，自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，应用旋量场来描写，实践上也证实了这一点。

严格来说，描写自旋为零的粒子应用标量场或赝标量场来描述。如果在宇称变换（坐标反射变换）下场的宇称不变，即 $\varphi\to\varphi$，这种场是标量场；反之，$\varphi\to-\varphi$，这种场是赝标量场。但粒子场的宇称性质只在与其它场相互作用时才体现出来，所以本章讨论自由场的情况下，不区别赝标量场和标量场。

从粒子的电荷来说，介子又有带电与不带之分，不带电的介子用实标量场来描写，带电的介子则需用复标量场来描写，本章先讨论不带电的中性介子场，即实标量场，然后讨论复标量场。

尽管任何粒子（或场）都必须通过相互作用才能显示其存在，不参与相互作用的粒子是不可想像的。但在一定条件下，粒子的运动状态可以近似地看成是“自由”的。为了理论研究的方便，我们先研究抽象化的“自由粒子”（自由场）的量子化特性，然后再研究各类粒子之间相互作用。

§ 5.1　实标量场量子化

1. 经典场

实标量场 $\varphi(x)$ 应满足的自由场方程是克来因—戈登方程

$$(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi(x) = 0 \qquad (5.1-1)$$

其中 m 是场相应的粒子的质量。

对一个场系统必存在一个拉氏量 L 和相应的拉氏量密度 $\mathscr{L}$。由第三章可知，它应满足如下普遍的拉氏运动方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) = 0 \qquad (5.1-2)$$

考虑到场方程(5.1—1)是对时空的二阶偏微分方程，选取

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi\ \partial_\mu \varphi + m^2\varphi^2) \qquad (5.1-3)$$

到把上述的拉氏量 $\mathscr{L}$ 代入拉氏运动方程(5.1—2)，可以得到场方程(5.1—1)，说明选择的 $\mathscr{L}$ 是合理的。

于是场的正则共轭动量

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (5.1-4)$$

哈密顿密度为：

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \pi \cdot \dot{\varphi} - \mathscr{L} \\ &= \frac{1}{2}(\pi^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^2) \end{aligned} \qquad (5.1-5)$$

在 $\mathscr{L}$ 中系数 $\frac{1}{2}$ 是为了使场的物理量得到合适的归一化而引入，其中负号是为了使场的能量密度 $\mathscr{H}$ 为正值（上式的 $\mathscr{H}$ 为正值）。

于是场的能量是（以 $\mathscr{L}$ 代入得）：

$$\begin{aligned} H &= \int \mathscr{H} \mathrm{d}^3x = \int (\pi\dot{\varphi} - \mathscr{L})\mathrm{d}^3x \\ &= \int \frac{1}{2}(\pi^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^2)\mathrm{d}^3x \end{aligned} \qquad (5.1-6)$$

上式也可由普遍的能量公式得到。在第三章有

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \qquad (5.1-7)$$

于是

$$T_{44}=\mathscr{L}-\dot{\varphi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\mathscr{L}-\pi\dot{\varphi}=-\mathscr{H}$$

场的能量

$$H=-\int T_{44}\mathrm{d}^3x=\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x$$

$$=\frac{1}{2}\int(\pi^2+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+m^2\varphi^2)\mathrm{d}^3x$$

下面求场的动量。由(5.1—7)有

$$T_{j4}=-i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=-i\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

$$P_j=-i\int T_{j4}\mathrm{d}^3x=-\int\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}^3x$$

所以场的动量是

$$\mathbf{P}=-\int\pi\nabla\varphi\mathrm{d}^3x \qquad (5.1-8)$$

2. **场的量子化**

按照§4.4所述，对场进行量子化的方法是：令场量 $\varphi(x)$和它的共轭动量 $\pi(x)$都是厄米算符，当二者的时间 $t=t'$ 时，它们服从如下的对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi(x,t),\pi(x',t)]=\delta(x-x')\\&[\varphi(x,t),\varphi(x',t)]=[\pi(x,t),\pi(x,t)]=0\end{aligned}\right\}(5.1-9)$$

场算符 φ 和 π 的 Heisenberg 运动方程是

$$\dot{\varphi}(x)=i[H,\varphi],\quad \dot{\pi}(x)=i[H,\pi] \qquad (5.1-10)$$

式中 Hamilton 量 H 由(5.1—6)式中各量变成算符得到，即

$$H=\frac{1}{2}\int(\pi^2+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+m^2\varphi^2)\mathrm{d}^3x$$

场的动量算符

$$\mathbf{P}=\int\pi\nabla\varphi\mathrm{d}^3x \tag{5.1-12}$$

将(5.1—11)代入(5.1—10)，利用(5.1—9)对易关系得到

$$\dot{\varphi}=\pi\ ,\ \dot{\pi}=(\nabla^2-m^2)\varphi$$

由上式得到

$$\ddot{\varphi}=\dot{\pi}=(\nabla^2-m^2)\varphi$$

即
$$(\partial_\mu^2-m^2)\varphi=0$$

由此得到与 Klein—Gordon 方程相似的算符方程。可见，只需将场变量理解为场算符，即可由经典场方程解出量子场的算符。

对任一物理量算符 $F(\varphi,\pi)$，满足运动方程

$$\dot{F}=i[H,F]$$

当 $F=H$ 时 $\dot{H}=i[H,H]=0$，即能量守恒。还可证明场的动量算符和能量算符是对易的。证明如下：由(5.1—12)和(5.1—9)有

$$\begin{aligned}[\mathbf{P},\varphi(x)]&=-\int\mathrm{d}^3x'\,[\pi(x')\nabla'\varphi(x'),\varphi(x)]_{t=t'}\\&=-\int\mathrm{d}^3x'\{[\pi(x'),\varphi(x)]\nabla'\varphi(x')\}_{t=t'}\\&=i\int\mathrm{d}^3x'\,\delta(x-x')\nabla'\varphi(x')_{t=t'}\\&=i\nabla\varphi(x)\end{aligned}$$

即
$$\nabla\varphi(x)=-i[\mathbf{P},\varphi(x)] \tag{5.1-13}$$

又
$$\begin{aligned}[\mathbf{P},\pi(x)]&=-\int\mathrm{d}^3x'\,[\pi(x')\nabla'\varphi(x'),\pi(x)]_{t=t'}\\&=-\int\mathrm{d}^3x'\{\pi(x')\nabla'[\varphi(x'),\pi(x)]\}_{t=t'}\\&=-i\int\mathrm{d}^3x'\{\pi(x')\nabla'\delta(x-x')\}_{t=t'}=i\nabla\pi(x)\end{aligned}$$

即
$$\nabla\pi(x)=-i[\mathbf{P},\pi(x)] \tag{5.1-14}$$

一般地有

$$\nabla F(\varphi,\pi)=-i[\mathbf{P},F] \tag{5.1-15}$$

表明场的任何物理量算符，在空间的变化也由场的总动量决定。上式可推广至四维动量算符，得

$$\partial_\mu F = -i[P_\mu, F] \qquad (5.1-16)$$

由

$$P_\mu = -i\int T_{\mu 4} d^3x$$

有

$$[P_i, P_\mu] = -i\int d^3x' [P_i, T_{\mu 4}(x')]_{t=t'}$$

$$= \int d^3x' \frac{\partial T_{\mu 4}(x')}{\partial x'_i} = 0$$

当 $\mu=4$ 时，有

$$[\mathbf{P}, H] = 0$$

由于 $\mathbf{P}$ 和 H 可以对易，故有共同本征值，本征方程为

$$P_\mu |a\rangle = K_{\mu a}|a\rangle \qquad (5.1-17)$$

对易关系(5.1—9)，Heisenberg 运动方程(5.1—10)和上式构成了场量子化的理论基础。

3. 场的粒子性

为了明显看出场的粒子性，我们将场的运动分解为方程(5.1—1)的本征振动，而最简单的本征振动是平面波振动。为此，假定场在一个边长为 L 的立方形空间的边界上有周期性，即

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{i}, t) = \varphi(\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{j}, t)$$

$$= \varphi(\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{k}, t)$$

令

$$\varphi(x) = A(\boldsymbol{k}, t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad (5.1-18)$$

由周期性边界条件要求

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}) \qquad n_1, n_2, n_3 = 0 \pm 1 \pm 2 \cdots \qquad (5.1-19)$$

n_i 的最低差值 $\Delta n_i = 1$，于是

$$\Delta k_i = \frac{2\pi}{L}\Delta n_i \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_k \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3 = \sum_k \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$$

当 $L\to\infty$ 时，$L^3 = v \to \infty$，故有

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{v}\sum_k(\quad)=\frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k(\quad)\tag{5.1-20}$$

这是一个从分立求和过渡到连续积分的重要表示。为简便计，令立方体边长 1 个单位，可将场 φ 及其共轭动量密度 π 做傅里叶展开

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\sum_k q_k(t)e^{ik\cdot x}\\ \pi(x)&=\sum_k p_k(t)e^{-ik\cdot x}\end{aligned}\right\}\tag{5.1-21}$$

其中 q_k 和 p_k 代表振幅，量子化后代表算符。由于 $\varphi^*=\varphi$ 为实数，对应厄米算符，由上式可得

$$\sum_k q_k e^{ik\cdot x}=\sum_k q_k e^{-ik\cdot X}=\sum_k q_{-k}^* e^{ik\cdot x}$$

所以

$$q_{-k}=q_k^*$$

同理

$$p_{-k}=p_k^*$$

注意到周期性条件 $k_i=\frac{2\pi}{L}n_i$ 有：

$$\int_v e^{i(k-k')\cdot x}\mathrm{d}^3x=v\delta_{k,k'}\quad 令\ v=1，则由(5.1-21)$$

可得

$$\left.q_k=\int\mathrm{d}^3x\varphi(x,t)e^{-ik\cdot x}p_k=\int\mathrm{d}^3x\pi(x,t)e^{ik\cdot x}\right\}\tag{5.1-22}$$

利用对易关系(5.1—9)可得

$$\left.\begin{aligned}[q_k,p_k]&=i\delta_{k,k'}\\ [q_k,q_k]&=[p_k,p_{k'}]=0\end{aligned}\right\}\tag{5.1-23}$$

其中

$$\delta_{k,k'}=\delta_{k_1k_1'}\delta_{k_2k_2'}\delta_{k_3,k'_3}$$

下面计算场的哈密顿。由(5.1—11)(注意到其中的 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 都是算子)

$$H=\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x=\frac{1}{2}\int\{\pi^2+\nabla\varphi.\nabla\varphi+m^2\varphi^2\}\mathrm{d}^3x\tag{5.1-24}$$

先计算最后一个积分。应用(5.1－22)可得：

$$\int \varphi^2 \mathrm{d}^3x = \int \sum_k \sum_{k'} q_k e^{ik\cdot x} q_{k'} e^{ik'\cdot x} \mathrm{d}^3x$$

$$= \sum_k \sum_{k'} q_k q_{k'} \delta_{-k,k'} = \sum_k q_k q_{-k}$$

$$= \sum_k q_k q_k^*$$

类似地计算其它两个积分，

$$\int \pi^2(x,t) \mathrm{d}^3x = \sum_k p_k p_k^*$$

$$\int \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}^3x = -\sum_{k\,k'} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' \, q_k q_{k'} \, e^{i(k+k')\cdot x} \mathrm{d}^3x$$

$$= \sum_k \boldsymbol{k}^2 q_k q_k^*$$

引进

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}$$

则有

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (p_k p_k^* + \omega_k^2 q_k q_k^*) \qquad (5.1-25)$$

上式表示无穷多个谐振子的哈密顿量。进一步引进如下变换

$$\left.\begin{aligned} q_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^* e^{i\omega_k t}) \\ p_k(t) &= -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a_k^* e^{-i\omega_k t} - a_k^* e^{i\omega_k t}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.1-26)$$

其中 a_k, a_k^* 是无量纲算符，则

$$\varphi(x,t) = \sum_k q_k e^{ik\cdot x}$$

$$= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \{a_k e^{i(k\cdot x-\omega_k t)} + a_k^* e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}\} \qquad (5.1-27)$$

$$\pi(x,t) = \varphi(x,t) = \sum_k -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \cdot \{a_k e^{i(k\cdot x-\omega_k t)} - a_k^* e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}\} \qquad (5.1-28)$$

从(5.1－26)解得

$$a_k = \left(\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}q_k + i\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}p_{-k}\right)e^{i\omega_k t}$$

$$a_k^* = \left(\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}q_{-k} - \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}p_k\right)e^{-i\omega_k t}$$

利用上式和(5.1－23)可得

$$\left.\begin{array}{l}[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{k \cdot k'} \\ [a_k, a_k] = [a_k^*, a_k^*] = 0\end{array}\right\} \tag{5.1－29}$$

把(5.1－26)代入(5.1－25)得场的总能量

$$H = \sum_k \frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^*)\omega_k$$

利用对易关系(5.1－29),上式改写成:

$$H = \sum_k (a^* a + \frac{1}{2})\omega_k \tag{5.1－30}$$

上式第二项称为场的零点能,即粒子数 $N_k = a_k^* a_k = 0$ 时的真空情态下计算出来的能量.这一项为无穷大(发散),这是没有物理意义的,应该抛弃。这个无穷大能量之所以出现,是由于直接采用 H 的经典表示式的结果。如果对 H 中的场算符进行一定的适当安排,场的零点能就不再出现。下面我们计算场的总动量,由(5.1－12)

$$\mathbf{P} = -\int \pi \nabla \varphi \mathrm{d}^3 x$$

由(5.1－27)求出 $\nabla\varphi$ 和(5.1－28)的 π 代入上式得

$$\mathbf{P} = -\sum_k i\mathbf{k} p_k q_k$$

再用(5.1－26)可得

$$\mathbf{P} = \sum_k (a_k^* a_k + \frac{1}{2})\mathbf{k} \tag{5.1－31}$$

类似的考虑可以抛去 $\sum_k \frac{1}{2}\mathbf{k}$ 的项。

以上所得到的结果的物理意义是:由 $\varphi(x)$ 描写的场是由一个一个的粒子组成,它们具有静止质量 m,服从玻色统计法则,$N_k = a_k^* a_k$ 代表动量为 $\mathbf{k}$ 的粒子的数目,a_k 的作用在于减少动量为 $\mathbf{k}$ 的粒

子的数目，称为粒子的消灭算符，而 $\hat{a}_k^*$ 的作用是增加动量为 k 的粒子的数目，称为粒子的产生算符。

以后我们常用到 k 为连续的展式。令方箱的体积 $v\to\infty$，则分裂的 k 值过渡到连续的 k 值，有如下的过渡方式：

利用 $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{1}{v}\sum\limits_{k}(\quad)\to\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k(\quad)$ 定义 $a_k=a(k)\sqrt{\Delta k_1\Delta k_2\Delta k_3}=a(k)(2\pi)^{3/2}$ 为简便，取 $v=1$，则(5.1—17)，(5.1—28)式改写成

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k)e^{i(k\cdot x-\omega_k t)}+a^*(k)e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}\right]\tag{5.1-32}$$

$$\pi(x)=\frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left[a(k)e^{i(k\cdot x-\omega_k t)}-a^*(k)e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}\right]\tag{5.1-33}$$

相应地有对易关系

$$[a(k),a^*(k')]=\delta(k-k')$$
$$[a(k),a(k')]=[a^*(k),a^*(k')]=0\tag{5.1-34}$$

相应地场的能量、动量为(略去场的零点能)：

$$H=\int d^3k a^*(k)a(k)\omega(k)\tag{5.1-35}$$

$$\mathbf{P}=\int d^3x a^*(k)a(k)k\tag{5.1-36}$$

其中 $N(k)=a^*(k)a(k)$ 是单位动量空间体积内动量为 k 的粒子数算符

$a^*(k)$ 是单位动量空间体积内产生一个动量为 k 的粒子算符。

$a(k)$ 是单位动量空间体积内湮没一个动量为 k 的粒子算符。

在时空点 $x(x,t)$ 产生和湮没一个粒子的算符也是很有意义而且很有用的。现将(5.1—32)式分写为二项之和。

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)\tag{5.1-37}$$

显然

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3x}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i(k\cdot x-\omega_k t)}a(k)\qquad(5.1-38)$$

称为负频部分(包含 $e^{-i\omega_k t}$),表示在 x 点单位体积中湮没一个粒子的算符,而

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}a^*(k)\quad(5.1-39)$$

称为正频部分(包含 $e^{+i\omega_k t}$),表示在 x 点,单位体积内产生一个粒子的算符,不过这时产生或湮没的粒子的动量是完全不确定的。与此相应 a_k^* 和 a_k 是产生或湮没一个动量为 k 的粒子算符,但在何时何处产生或湮没却完全没有确定,这些都反映了测不准关系的内容。

4. 协变形式的对易关系

近代量子场论获得重要成就的原因之一,是由于计算过程中保持了相对论不变性的原则。但是前面所述的对易关系(5.1—9),只限于同一时间算符 $\varphi(x,t)$ 和 $\pi(x',t)$ 之间的对易关系,(5.1—9)的右边的 δ 函数只含空间坐标,而左边却含有时间和空间坐标,这个对易关系中时间和空间处于不对称地位,因此并不明显具有相对论不变性。为检验理论是否具有相对论不变性,必须求不同时间的对易关系。

从上面(5.1—37)—(5.1—39)看到,把 $\varphi(x)$ 分解成正、负频部分后,有

$$[\varphi^{(-)}(x)]^*=\varphi^{(+)}(x)\qquad(5.1-40)$$

利用对易关系(5.1—34)容易证明 $\varphi^{(+)}$ 和 $\varphi^{(-)}$ 满足如下对易关系(不同时间):

$$\left.\begin{aligned}
&[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(+)}(x')] = [\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(-)}(x')] = 0 \\
&[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')] = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{ik(x-x')} \\
&= i\Delta^{(+)}(x-x') \\
&[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')] = \frac{-1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik(x-x')} \\
&= i\Delta^{(-)}(x-x')
\end{aligned}\right\}$$

(5.1－41)

其中　$k_4 = ik_0 = i\omega_k, k_0 = \omega_k > 0, kx = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - k_0 t$

$\Delta^{(+)}(x)$ 和 $\Delta^{(-)}x$ 定义为

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x) &= \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{ikx} = \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ik_0 t} \\
\Delta^{(-)}(x) &= \frac{i}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{-ikx} = \frac{i}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + ik_0 t}
\end{aligned}\right\}$$

(5.1－42)

令
$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} \sin kx \quad (5.1-43)$$

$\Delta(x)$函数有如下性质：

(1)$\Delta(x)$是奇函数，即 $\Delta(x) = -\Delta(-x)$。从(5.1－43)式立即可看出这一点。

(2)$\Delta(x)$、$\Delta^{(\pm)}(x)$函数对空间反射和Lorentz变换不变。因为可将(5.1－43)改写成

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{e^{-ik_0 t} - e^{ik_0 t}}{2i} \qquad (5.1-45)$$

由上式可见 $\Delta(\boldsymbol{x},t) = \Delta(-\boldsymbol{x},t)$，另外，利用 δ 函数的性质，由

$$\delta(k^2 + m^2) = \delta(\boldsymbol{k}^2 - k_0^2 + m^2) = \delta(\omega_k^2 - k_0^2) = \delta(k_0^2 - \omega_k^2)$$
$$= \frac{1}{2\omega_k}[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]$$

引入阶梯函数 $\theta(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} 1 & k_0 > 0 \\ -1 & k_0 < 0 \end{cases}$　则有

$$\int dk_0\theta(k_0)e^{-ik_0t}\delta(k^2+m^2)=\int dk_0e^{-ik_0t}\theta(k_0)\frac{\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k)}{2\omega_k}$$
$$=(e^{-i\omega_kt}-e^{i\omega_kt})/2\omega_k$$

所以

$$\Delta(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^k}{2k_0}e^{ik\cdot x}(e^{ik_0t}-e^{-ik_0t})$$
$$=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4ke^{ikx}\theta(k_0)\delta(k^2+m^2) \qquad (5.1-46)$$

上式是 Lorentz 不变的，因为 d^4k,kx,k^2,m^2都是标量。同理可证 $\Delta^{(\pm)}(x)$具有 Lorentz 不变性。

(3)$\Delta(x—x')|_{t=t'}=0$。(由(5.1－43)立即可见)(5.1－47)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x-x')|_{t=t'}=-\delta(x)\text{(直接微商可得)} \qquad (5.1-48)$$

(4)满足 Klein—Gordon 方程。即

$$\left.\begin{aligned}(\partial_\mu^2+m^2)\Delta(x-x')=0\\(\partial_\mu^2-m^2)\Delta^{(\pm)}(x-x')=0\end{aligned}\right\} \qquad (5.1-49)$$

(5)$\Delta^{(+)}(x)=-\Delta^{(-)}(-x)$ (5.1－50)

利用上面结果可求得不同时间的对易关系(注意 $\varphi=\varphi^*$)，

$$[\varphi(x),\varphi^*(x')]=[\varphi(x),\varphi(x')]$$
$$=[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]+[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')]$$
$$=i\Delta^{(-)}(x-x')+i\Delta^{(+)}(x-x')$$
$$=i\Delta(x-x') \qquad (5.1-51)$$

上式左边 $\varphi(x)$、$\varphi(x')$是标量(或赝标量)，右边 $\Delta(x-x')$是 Lorentz 不变的，所以这是一个协变形式的对易关系。其有 Lorentz 不变性。

不难看出，上述对易关系(5.1－51)包括了同一时间的对易关系(5.1－9)，因为：

$$[\pi(x,t),\varphi(x',t)]=\{\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(x),\varphi(x')]\}_{t=t'}$$

$$= i\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x - x')\}_{t=t'}$$

$$= - i\delta(x - x')$$

最后，讨论不同时间的对易关系(5.1－51)式的物理意义。

当 $t - t' = 0$时，(5.1－51)变成

$$[\varphi(x,t),\varphi(x',t)] = 0$$

和以前的对易关系一致。按照量子力学，两个可以相互对易的厄米算符，是可以同时精确测量的，因此，$\varphi(x,t)$和 $\varphi(x',t)$二个场量是可以同时测量的，也就是说测量这两个场量不会互相干扰。从相对论的观点来看，这两个时空点(x,t)和(x',t)之间不可能有任何信号联系。进一步可以推论，不仅当 $t=t'$ 时 $\Delta(x - x')=0$，而且对任何类空矢量 x，即当

$$x^2 = \mathbf{x}^2 - t^2 > 0$$

时，$\Delta(x)$也等于零。因为任何类空矢量 x 都可以通过适当的罗仑兹变换，使得在新坐标系中 $x_0=t=0$。所以在光锥上$|\mathbf{x}|=t$之处，不变性函 $\Delta(x)$恒为零。与此相应，当 x 与 x' 二点为类空间隔$(x-x')^2>0$，即二点在光锥之外，对易关系(5.1－51)必等于零。反之，如果对易关系(5.1－51)不等于零，则表示在 x 和 x' 点测量场量时彼此将发生干扰，这时 x 和 x' 二点为类时间隔。因此，对易关系(5.1－51)很好地把相对论理论和量子力学联系起来。

§5.2 复标量场量子化

现在已发现的介子有 π^0、$\pi^\pm$、$K^0\overline{K}^0$、$K^\pm$、ρ^0、$\rho^\pm$ 等等，它们有中性的，也有带电的。相对论量子力学的电子理论中提出子粒子和反粒子的概念($e^\pm$ 为一对正、反粒子)，人们试图把这一概念推广到其它类型的粒子，把电荷相等而又反号的同类粒子都看作粒子和反粒子，如 $\pi^+ - \pi^-$、$K^+ - K^-$、$P - P^-$ 等。这样的粒子具有两个电荷自由度，假如要用一个量子场来描写粒子反粒子的性质和运动

规律，场变量必须由两个独立变量组成。

前面介绍过的实标量场只有一个独立变量，不能描写正负介子对的性质和运动规律，而一个复数场则能满足这一要求。因此，我们用一个复数场来描述自旋为零的荷电粒子，如荷电介子。

1.**经典场**

自旋为零的荷电粒子可用复数场来描写，$\varphi(x)$和它的共轭复数量 $\varphi^*(x)$都是独立场变量，分别满足 klein－Gordon 方程

$$\left.\begin{aligned}(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi(x) = 0\\(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi^*(x) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-1)$$

如果选取拉氏密度

$$\mathscr{L} = -(\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + m^2\varphi^*\varphi) \qquad (5.2-2)$$

则根据拉氏运动方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = 0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^*} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-3)$$

可导出(5.2—1)

引进 φ 和 $\varphi*$ 的共轭正则动量 π 和 π^*

$$\left.\begin{aligned}\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\\\pi^* = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-4)$$

则场的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* - \mathscr{L}\\&= \nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi + \pi^*\pi + m^2\varphi^*\varphi\end{aligned} \qquad (5.2-5)$$

场的能量

$$H = \int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x = \int(\pi^*\pi + \nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi + m^2\varphi^*\varphi)\mathrm{d}^3x \qquad (5.2-6)$$

场的动量

$$P = -\int(\pi\nabla\varphi + \pi^*\nabla\varphi^*)\mathrm{d}^3x \qquad (5.2-7)$$

由(3.5—9)

$$J_4 = -ie\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_4\varphi)}\varphi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_4\varphi^*)}\varphi^*\right\}$$
$$= e\{\dot{\varphi}^*\varphi - \varphi^*\dot{\varphi}\}$$

所以场的总电荷为

$$Q = \int\rho\mathrm{d}^3x = -i\int J_4\mathrm{d}^3x = -ie\int\mathrm{d}^3x(\dot{\varphi}^*\varphi - \varphi^*\dot{\varphi}) \qquad (5.2\text{-}8)$$

或 $$Q = ie\int(\varphi^*\pi^* - \pi\varphi)\mathrm{d}^3x \qquad (5.2\text{-}8')$$

2. 场的量子化

我们可以应用上一章中所讲的一般量子化方法，对复数场 φ 和 φ^*（现在它们是非厄米算符）进行量子化，但也可以将复数场 φ 用两个实数场 φ_1 和 φ_2 来表示。引进

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \\
\varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \\
\pi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \\
\pi^*(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2)
\end{aligned}\right\}. \qquad (5.2\text{-}9)$$

然后用实数场的量子化方法进行量子化。下面我们采用后一种方法，这样可以利用前节实数场有关的结果。

同时间的对易关系

$$\left.\begin{aligned}
&[\varphi_r(x,t)\pi_{r'}(x,t)] = i\delta_{rr'}\delta(x-x') \\
&\text{其余各对易子为零}, r = 1,2
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-10)$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}
&[\varphi(x,t),\pi(x',t)] = i\delta(x-x') \\
&[\varphi^*(x,t),\pi^*(x',t)] = i\delta(x-x')
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-11)$$

量子运动方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{\varphi}=i[H,\varphi], & \dot{\pi}=i[H,\pi] \\ \dot{\varphi}^{*}=i[H,\varphi^{*}], & \dot{\pi}^{*}=i[H,\pi^{*}]\end{array}\right\} \tag{5.2-12}$$

3. 场的粒子性

像上节一样，我们把 φ_r 分解为平面波

$$\varphi_r(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\{a_r(k)e^{ikx}+a_r^{*}(k)e^{-ikx}\} \tag{5.2-13}$$

对易关系

$$[a_r(k),a_{r'}^{*}(k')]=\delta_{rr'}\delta(k-k') \tag{5.2-14}$$

其余对易子为零。

今引进入如下定义的算符 $a(k)$和 $b(k)$

$$\left.\begin{array}{l}a(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k)-ia_2(k)] \\ b^{*}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[a_1^{*}(k)-ia_2^{*}(k)]\end{array}\right\} \tag{5.2-15}$$

由(5.2—9)和(5.2—13)可得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\{a(k)e^{ikx}+b^{*}(k)e^{-ikx}\} \\ &=\varphi^{(-)}(x)+\varphi^{(+)}(x)\end{aligned} \tag{5.2-16}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{*}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega k}}\{a^{*}(k)e^{-ikx}+b^{*}(k)e^{ikx}\} \\ &=\varphi^{*(+)}(x)+\varphi^{*(-)}(x)\end{aligned} \tag{5.2-17}$$

由(5.2—14)和(5.2—15)可得下面对易关系

$$\left.\begin{array}{l}[a(k),a^{*}(k')]=[b(k),b^{*}(k')]=\delta(k-k') \\ \text{其余对易子为零}\end{array}\right\} \tag{5.2-18}$$

由(5.2—16)—(5.2—18)可求得协变形式的对易关系为

$$[\varphi(x),\varphi^{*}(x')]=i\Delta(x-x') \tag{5.2-19}$$

利用(5.2—6)可求得场的总能量为

$$H = \int d^3k[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k)]\omega_k \quad (5.2-20)$$

利用(5.2—7)可求得场的总动量为

$$P = \int d^3k[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k)]k \quad (5.2-21)$$

利用(5.2—8)可求得场的总电荷为

$$Q = e\int d^3x[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k)] \quad (5.2-22)$$

上式的计算如下：将(5.2—16)和(5.2—17)代入 Q 的表示式(5.2—8)，得

$$Q = \frac{e}{(2\pi)^3}\int d^3k\int d^3k'\int d^3x \frac{1}{2\sqrt{k_0k'_0}}$$

$$[(k_0a^*(k)e^{-ikx} - k_0b(k)e^{ikx}) \cdot (a(k')e^{ik'x} + b^*(k)e^{-ik'x})$$

$$-(a^*(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}) \cdot (-k'_0a(k')e^{ik'x}$$

$$+ k'_0 b^*(k')e^{(-ik'x)})]$$

因 $\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3xe^{i(k-k')x} = \delta(k-k')$

故 $Q = e\int d^3k[a^*(k)a(k) - b(k)b^*(k)]$

应用对易关系(5.2—18)，上式写成

$$Q = e\int d^3k[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k) - 1] \quad (5.2-23)$$

略去与物理意义不符的零点电荷，即得(5.2—22)。

在 H、P、Q 的表示式中，已经把没有物理意义的零点能量、零点动量和零点电荷抛弃。可以看出：$N^+(k) = a^*(k)a(k)$ 是代表电荷为 e 的粒子数算符，$a^*(k)$ 和 $a(k)$ 分别表示在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量为 k 电荷为 e 的粒子的算符。

$N^-(k) = b^*(k)b(k)$ 是代表电荷为 $-e$ 的粒子数算符，$b^*(k)$ 和 $b(k)$ 分别代表单位动量空间体积内产生和消灭动量为 k、电荷为 $-e$ 的粒子的算符，这两种粒子的静止质量都是 m。如果我们把带正电 e 的粒子称为粒子，而带负电的粒子就称为反粒子(当然也可以反过来定义)。那么上述 N^+ 和 N^- 也称为正反粒子数算

符。

还可指出，(5.2－8)的被积函数在旧量子理论中代表总几率，因而产生负几率的困难。现在，在量子场论中，没有几率的意义，以前被认为的负几率现在代表了反粒子。

由(5.2－16)和(5.2－17)，我们把场算符分成正、负频率部分，其中

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}a(\boldsymbol{k})$$

是在 x 点单位体积内湮没一个正介子的算符

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx}b^*(\boldsymbol{k})$$

是在 x 点单位体积内产生一个负介子的算符。

$$\varphi^{*(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}b(\boldsymbol{k})$$

是在 x 点单位体积内湮没一个负介子的算符。

$$\varphi^{*(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx}a^*(\boldsymbol{k})$$

是在 x 点单位体积内产生一个正介子的算符。

4.正反粒子共轭变换

从对易关系(5.2－18)和哈密顿量(5.2－20)可以看出，这一理论对 a 和 b 是对称的，因为假使进行如下的变换：

$$a_k \leftrightarrows b_k \qquad a_k^* \leftrightarrows b_k^* \tag{5.2－24}$$

(5.2－18)和(5.2－20)是不变的。

由(5.2－16)和(5.2－17)可见，在这一变换中场算符作如下的变换：

$$\varphi(x)\to\varphi^*(x) \qquad \varphi^*(x)\to\varphi(x) \tag{5.2－25}$$

显然，对易关系的另一形式(5.5－11)、哈密顿量(5.5－6)，运动方程(4.4－1)、对变换(5.5－25)都具有不变性。于是在这一理论中，正电荷粒子和负电荷粒子具有完全对称的地位，我们称变换(5.5－25)为电荷共轭变换。

这种理论也可以用来描写不带电的中性粒子，这种中性粒子其有正反粒子二类，它们具有相同的质量，自旋和宇称，但它们的磁矩可以不同，例如反中子的磁矩与正中子的磁矩反号。如果我们用 a 来标志正粒子，则 b 就标志反粒子。也可以倒过来用 a 来标志反粒子及用 b 标志正粒子，故变换(5.2－25)也称为正反粒子的共轭变换。当然，假使用这一理论来描述中性粒子，J_μ 就不能理解为四电流密度，我们可以将 J_μ/e 理解为正粒子和反粒子密度(或流)之差，而连续方程就理解为正粒子数和反粒子数的差的守恒定律。

在目前已知自旋为零的基本粒子中有荷电的介子如 $\pi^\pm$ 和 $K^\pm$，也有中性介子如 π^0，K_1^0，K_2^0，故用复数 φ 和 φ^* 除可以描写荷电的 $\pi^\pm$ 和 $K^\pm$ 之外也可以用以描写中性的 K_1^0，和 K_2^0，但是 π^0 介子只有一种，并不存在着反粒子，故我们应该用上节所述的实数场来描写，如果用复数场 φ 和 φ^* 来描写 π^0 介子，自由度将多了一倍，理论上包含了一个客观上不存在的粒子，所以是不适当的。

§5.3 π 介子的同位旋

根据实验的分析，荷电 π 介子 π^+ 和 π^- 的质量完全相同，约为 $273m_e$，中性的 π^0 介子的质量稍为小一些，约为 $264m_e$。故荷电 π 介子和中性 π 介子的质量差别不到3.5%。可以假定这个质量差别来自带电 π 介子的电磁质量，假使不考虑电磁质量而将其略去，那末三种介子的质量可能完全一样，故可认为这三种介子是同一种'基本粒子'而处在不同的电荷状态。为给予这三种 π 介子统一的描述，我们引进同位旋空间和同位旋的概念。在历史上，首先引入同位旋这一概念的是卡孙和康登(Cassen and Condon，1936)，他们是在讨论原子核结构和核子力的时候引入同位旋坐标来标志质子和中子的，并将质子和中子合并称为核子。在这一节我们从场论的观点来讨论 π 介子的同位旋。

首先，将复数场 φ 表示为二个实数场 φ_1 和 φ_2，于是荷电介子的拉氏密度可写为

$$\mathscr{L}^c = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$$
$$= -\frac{1}{2}\{\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 + m_1^2\varphi_1^2\} - \frac{1}{2}\{\partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 + m_2^2\varphi_2^2\}$$

而中性介子的拉氏密度是

$$\mathscr{L}_3 = -\frac{1}{2}\{\partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3 + m_3^2\varphi_3^2\}$$

今这三种介子的质量认为是相同的，即 $m_1=m_2=m_3=m$，则二者的拉氏密度具有相同的形式。引进总拉氏密度 $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_3$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_i\{\partial_\mu\varphi_i\partial_\mu\varphi_i + m^2\varphi_i^2\} \qquad i = 1,2,3$$

从上式我们可看出，如果把 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$认为是某一个三维的抽象空间中一个赝矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的三个分量，则总拉氏密度可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\{\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + m^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\} \qquad (5.3-1)$$

从而导出场方程

$$(\partial_\mu^2 - m^2)\boldsymbol{\varphi} = 0 \qquad (5.3-2)$$

容易看出，从拉氏密度(5.3—1)可以得出场的总能量—动量等。

假使把这个抽象的三维空间作一转动，则 $\boldsymbol{\varphi}$ 将作如下的转动变换：

$$\varphi_j - \varphi'_j = a_{jk}\varphi_k$$
$$a_{jk}a_{jl} = \delta_{kl} \qquad (5.3-3)$$

在这变换下拉氏密度 $\mathscr{L}$ 将保持不变。为了求得和这个变换相应的守恒量，我们研究无穷小的转动变换：

$$a_{jk} = \delta_{jk} + \varepsilon_{jk}$$
$$\varepsilon_{jk} = -\varepsilon_{kj} \qquad (5.3-4)$$

其中 ε_{jk}是无穷小的数值。相应于这个无穷小变换，$\boldsymbol{\varphi}$ 作如下的变换

$$\varphi'_j = \varphi_j + \varepsilon_{jk}\varphi_k \qquad (5.3-5)$$

由于拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在这变换中具有不变性，即 $\delta\mathscr{L}=0$，故

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_j}\varepsilon_{jk}\varphi_k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\varepsilon_{jk}\partial_\mu\varphi_k = 0 \qquad (5.3-6)$$

考虑到拉氏方程，得

$$\varepsilon_{jk}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\varphi_k\} = 0 \qquad (5.3-7)$$

因为 ε_{jk} 是任意的数值，并且 $\varepsilon_{jk}=-\varepsilon_{kj}$，故由上式得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\mu}J_{jk,\mu} = 0 \qquad j,k = 1,2,3\\&J_{jk,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\varphi_k - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}\varphi_j\end{aligned}\right\} \qquad (5.3-8)$$

以 $\mathscr{L}$ 代入得

$$J_{jk,\mu} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\mu}\varphi_j - \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\varphi_k \qquad (5.3-9)$$

(5.3—8)式具有守恒定律的微分形式，相应的守恒量是

$$T_{jk} = i\int J_{jk,4}\mathrm{d}^3x = \int\mathrm{d}^3x\{\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\varphi_j - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\varphi_k\} \qquad (5.3-10)$$

为了将上式写得简单一些，将 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 写成一列的矩阵即

$$\varphi = \begin{vmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\end{vmatrix} \qquad (5.3-11)$$

并且引进如下三个矩阵：

$$t_{23} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -i\\0 & i & 0\end{vmatrix} \qquad t_{31} = \begin{vmatrix}0 & 0 & i\\0 & 0 & 0\\-i & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$t_{12} = \begin{vmatrix}0 & -i & 0\\i & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix} \qquad (5.3-12)$$

则(5.3—10)式可写为

$$T_{jk} = -i\int\mathrm{d}^3x\frac{\partial\varphi^+}{\partial t}t_{jk}\varphi \qquad (5.3-13)$$

若定义抽象空间中的二个赝矢量 $\boldsymbol{T}(T_1,T_2,T_3)$ 和 $\boldsymbol{t}(t_1,t_2,t_3)$

$$\left.\begin{aligned}&T_1 = T_{23}, \quad T_2 = T_{31}, \quad T_3 = T_{12}\\&t_1 = t_{23}, \quad t_2 = t_{31}, \quad t_3 = t_{12}\end{aligned}\right\} \qquad (5.3-14)$$

则可以将(5.3—13)式写成

$$T = -i\int \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} t\varphi \mathrm{d}^3x \qquad (5.3-15)$$

我们称守恒量 T 为"同位旋",并称所引入的抽象空间为"同位旋空间"。从数学形式看,同位旋和自旋有很相象的地方,自旋的表示决定于场量 φ 在空间转动时如何变换,同位旋的表示决定于场量在同位旋空间转动时如何变换。

可以想见,第一种规范变换和同位旋空间转动有密切联系,因为它们都可以和粒子的荷电状态联系。在第一种规范变换中,φ 作如下的变换

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_1 &= \varphi_1\cos\alpha + \varphi_2\sin\alpha \\ \varphi'_2 &= -\varphi_1\sin\alpha + \varphi_2\cos\alpha \\ \varphi'_3 &= \varphi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3-16)$$

这是因为 $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$,而实数场 φ_3 在第一种范变换中是不变的,故变换(5.3—16)实际上等于在同位旋空间统第三轴转动一个角度 α,这样,电荷守恒定律在目前情况下和同旋第三分量 T_3 的守恒完全等效,(5.3—15)的 T_3 的表式和场的电荷 Q 的表式(5.2—8)只相差一个因子 e。

在场量子化中,引入和 φ 相共轭的正则动量:

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \qquad (5.3-17)$$

及 φ 和 π 之间的对易关系,在 $t=t'$ 时有

$$[\varphi_j(x), \pi_k(x')] = i\delta_{jk}\delta(x-x') \qquad (5.3-18)$$

如果我们将 π_1,π_2,π_3 写成一行矩阵,并以 π 代表,则同位旋 T 可成如下的表式

$$T = -i\int \mathrm{d}^3x \pi t \varphi \qquad (5.3-19)$$

应用对易关系(5.3—18)及注意到

$$\left.\begin{aligned} [t_1,t_2] = it_3, \qquad [t_2,t_3] = it_1 \\ [t_3,t_1] = it_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3-20)$$

容易证明 T 服从如下对易关系

$$\left.\begin{array}{ll}[T_1,T_2]=iT_3, & [T_2,T_3]=iT_1 \\ [T_3,T_1]=iT_2 & \end{array}\right\} \qquad (5.3-21)$$

由此可见，T 的对易关系在数学形式上和角动量 M 的对易关系完全一样，因此有关同位旋的许多结论，都可从角动量的理论推论出来。

由于同位旋第三分量 T_3和总电荷 Q 的表式只相差一因数 e，故从(5.2－21)式可得

$$T_3=\sum_{s}(N_{as}-N_{bs}) \qquad (5.3-22)$$

由这式可知，π^+、π^0、π^-介子的同位旋第三个分量各为1、0、－1，因此场的总同位旋的各个分量 T_1,T_2,T_3，具有如下的本征值：

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$$

我们还可以指出每一个 π 介子也是算符 T^2的本征态，其相应的本征值是2＝1(1＋1)，即是说 π 介子都具有同位旋1，而 π^+，π^0，π^-的同位旋第三个分量分别是1，0，－1。

第六章　旋量场量子化

轻子 e、μ、ν 和许多重子如 P、N、Λ、Σ、Ξ 等都是自旋为 $\frac{1}{2}$ 费米粒子，它们除了有空间坐标自由度外，还有自旋自由度，因而不能用标量场来描述。Dirac 方程可以近似地描述单个费米子的运动，成功地解释了原子光谱中的精细结构现象。但对于某些更精密的现象，例如兰姆能级移动和真空极化现象，狄拉克的理论就不能适用。另一方面，狄拉克理论存在负能困难，也不能描述包含有二个以上粒子的运动，以及粒子的产生湮没等现象。所有这些现象的精密讨论，都必须用量子化的费米子场，即把狄拉克方程当作经典场方程，并进一步将这个场量子化。前面我们已经讨论过狄拉克方程中的波函数是旋量，因此，与它相应的场既不是标量场也不是矢量场，而是旋量场，狄拉克方程就是旋量场方程。

§6.1　经典场

旋量场方程是

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \qquad (6.1-1)$$

其共轭方程是

$$(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0 \qquad (6.1-2)$$

这里 $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$

上面两个方程可由下面的拉氏密度代入拉氏方程得出

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi \qquad (6.1-3)$$

引进与 ψ 共轭的正则动量

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma_4 = i\psi^+ \qquad (6.1-4)$$

这里，ψ^+不是独立变量，故没有与之共轭的动量(实际上，$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}^+}=0$)。

把 $\mathscr{L}$ 的表示式(6.1—3)代入第三章所得到场的能量、动量、和电荷表示式，可以求出场的总能量、总动量和总电荷。将 $\mathscr{L}$ 代入(3.3—6)，注意只有 ψ 是独立变量，场的能量、动量张量

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial \mathscr{L}}{(\partial_\nu \psi)}\partial_\mu \psi$$

$$=-\bar{\psi}(\gamma_\lambda \partial_\lambda+m)\psi\delta_{\mu\nu}+\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi \qquad (6.1-5)$$

场的能量，由(3.3—10)有

$$H=-\int T_{44}\,\mathrm{d}^3x=\int\left[\bar{\psi}(\gamma_4\partial_4+\gamma\cdot\nabla+m)\psi-\bar{\psi}\gamma_4\partial_4\psi\right]\mathrm{d}^3x$$

$$=\int\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi\,\mathrm{d}^3x=i\int\psi^+\,\partial_0\psi\,\mathrm{d}^3x \qquad (6.1-6)$$

场的动量，由(3.3—9)有

$$P_j=-\int \mathrm{d}^3x T_{j4}=-\int \mathrm{d}^3x\psi^+\,\partial_j\psi \qquad (6.1-7)$$

联合两式得

$$P_\mu=-i\int \mathrm{d}^3x\psi^+\,\partial_\mu\psi \qquad (6.1-8)$$

场的电荷，由(3.5—9)、(3.5—10)有

$$J_\mu=-ie\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^+)}\psi^+\right\}$$

$$=-ie\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi=ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \qquad (6.1-9)$$

$$Q=-i\int J_4\,\mathrm{d}^3x=e\int \mathrm{d}^3x\psi^+\,\psi \qquad (6.1-10)$$

场的自旋，由(3.4—18)有

$$S_{\mu\nu}=-\int\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}\mathrm{d}^3x$$

以

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}(I+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu})\psi=S_{\mu\nu}\psi$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi^+ \qquad S_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu$$

代入得

$$S_{\mu\nu} = -i\int \psi^+ \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi\, d^3x$$

注意到 $\gamma_i\gamma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

于是有 $S_{ij} = \int \psi^+ \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\psi\, d^3x$

或 $\boldsymbol{S} = \int \psi^+ \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\psi\, d^3x$

这正是自旋算符$\frac{1}{2}\sigma$的平均值，其自旋 $S=\frac{1}{2}$。

§6.2 场的量子化和粒子性

Dirac 旋量场，描述自旋为1/2的费米粒子，费米子要服从 Pauli 不相容原理（在原子和分子结构物理中，人们早就知道一个确定的电子态最多只能有一个电子）。第四章§4.2已经阐明，对易关系的量子化条件不能满足这一要求，必需采用反对易关系。假设旋量场 ψ 和它的共轭动量 π 满足如下反对易关系（$t = t'$）：

$$\left.\begin{aligned}
[\psi_\sigma(x), \pi_\rho(x')]_+ &= i\delta_{\sigma\rho}\delta(x - x') \\
[\psi_\sigma(x), \psi_\rho^+(x')]_+ &= \delta_{\sigma\rho}\delta(x - x') \\
[\psi_\sigma(x), \psi_\rho(x')]_+ &= [\psi_\sigma^+(x), \psi_\rho^+(x')]_+ = 0
\end{aligned}\right\} \quad (6.2-1)$$

这里 $\sigma, \rho = 1,2,3,4$ 代表 ψ 的四个旋量分量。

为了反映费米子的粒子性，我们将场算符进行傅里叶展开，即分解为 Dirac 方程的平面波解。在第二章§2.9我们已得到 Dirac 方程的四个平面波解(2.9-1)

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{\rm I}(x) &= u^{(1)}e^{ipx}(\boldsymbol{p}, p_0 = E, \lambda = 1) \\
\psi_{\rm II}(x) &= u^{(2)}e^{ipx}(\boldsymbol{p}, p_0 = E, \lambda = -1) \\
\psi_{\rm III}(x) &= v^{(1)}e^{-ipx}(-\boldsymbol{p}, p_0 = -E, \lambda = 1) \\
\psi_{\rm IV}(x) &= v^{(2)}e^{-ipx}(-\boldsymbol{p}, p_0 = -E, \lambda = -1)
\end{aligned}\right\} \quad (6.2-2)$$

将旋量场算符函数按上述四个独立解答展开（$\sqrt{\frac{m}{E}}$是归一化因子）得

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}[a_r(p)u^{(r)}(p)e^{ipx}+b_r^*(p)v^{(r)}(p)e^{-ipx}]$$

(6.2－3)

其共轭场算符

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}[a_r^*(p)\bar{u}^{(r)}(p)e^{-ipx}+b_r(p)\bar{v}^{(r)}(p)e^{ipx}]$$

(6.2－4)

注意到 $\bar{\psi}=\psi^+\gamma_4, \bar{u}=u^+\gamma_4, \bar{v}=v^+\gamma_4$，取旋量分量式，上两式变成

$$\psi_\alpha(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}[a_r(p)u_\alpha^{(r)}(p)e^{ipx}+b_r^*(p)v_\alpha^{(r)}(p)e^{-ipx}]$$

(6.2－5)

$$\psi_\beta^+(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{s=1}^{2}$$

$$\cdot[a_s^*(p)u_\alpha^{(r)+}(p)e^{-ipx}+b_s(p)v_\beta^{(r)+}(p)e^{ipx}] \qquad (6.2-6)$$

将上两式代入对易关系(6.2－1)第二式，并利用 u,v 的正交归一性质(2.9－8)，可求得算符 $a_r(p)$、$b_r(p)$、$a_r^*(p)$、$b_r^*(p)$之间的对易关系如下：

$$\begin{aligned}[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^+(x')]_{+t=t'} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int d^3p\, d^3p' \\ &\sum_{r,s}\{[a_r(p),a_s^*(p')]_+ u_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}(p')e^{i(px-p'x')} \\ &+[b_r^*(p),b_s(p')]_+ v_\alpha^{(r)}(p)v_\beta^{(s)+}(p')e^{i(px-p'x')} \\ &+[a_r(p),b_s(p')]_+ u_\alpha^{(r)}(p)v_\beta^{(s)+}(p')e^{i(px+p'x')} \\ &+[b_r^*(p),a_s^*(p')]_+ v_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}(p')e^{-i(px+p'x')}\} \\ &=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')\end{aligned} \qquad (6.2-7)$$

由上式右边与 t 无关，故左边与 t 有关的项其系数应为零。注意到 $t=t'$

$$e^{\pm i(px-p'x')}=e^{\pm i(\mathbf{p}\mathbf{x}-\mathbf{p}'\mathbf{x}')}e^{\mp i(p_0-p'_0)t}$$

$$e^{\pm i(px+p'x')}=e^{\pm i(\mathbf{p}\mathbf{x}+\mathbf{p}'\mathbf{x}')}e^{\mp i(p_0+p'_0)t}$$

而$(p_0+p'_0)t\neq 0$，$(p_0-p'_0)t\neq 0$（除$p_0=p'_0$）外。

于是(6.2－7)大括号中最后两项系数必等于零，即

$$[a_r(p),b_s(p')]_+=[b_r^*(p),a_s^*(p')]_+=0$$

而第一、二项，也只当$p_0=p'_0$时才不为零（保留这些项），于是(6.2－7)式简化成

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int d^3p\,d^3p'\sum_{r,s}[a_r(p),a_s^*(p')]_+u_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}(p')e^{i(px-p'x')}$$

$$+[b_r^*(p),b_s(p')]_+v_\alpha^{(r)}(p)v_\beta^{(s)+}(p')e^{-i(px-p'x')}$$

$$=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')$$

以$e^{-i(kx-k'x')}$乘上式两边，并对$d^3x\,d^3x'$积分，利用公式$\int e^{i(p-k)x}d^3x=(2\pi)^3\delta(p-k)$于上式

$$左边=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int d^3p\,d^3p'\;d^3x\,d^3x'\sum_{r,s}\{[a_r(p),a_s^*(p')]_+u_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}$$

$$e^{i(p-k)x}e^{-i(p'-k')x'}+[b_r^*(p),b_s(p')]_+v_\alpha^{(r)}(p)v_\beta^{(s)+}(p')e^{-i(p+k)x}$$

$$e^{i(p'+k')x'}\}=(2\pi)^3\frac{m}{E}\int d^3p\,d^3p'\sum_{r,s}\{[a_r(p),a_s^*(p')]_+$$

$$u_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}(p')\delta(p-k)\delta(p'-k')$$

$$+[b_r^*(p),b_s(p')]_+v_\alpha^{(r)}(p)v_\beta^{(s)+}(p')\delta(p+k)\delta(p'+k')\}$$

$$=(2\pi)^3\frac{m}{E}\sum_{r,s}\{[a_r(k),a_s^*(k')]_+u_\alpha^{(r)}(k)u_\beta^{(s)+}(k')$$

$$+[b_r^*(-k),b_s(-k')]_+v_\alpha^{(r)}(-k)v_\beta^{(s)+}(-k')\}$$

$$右边=\int\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')e^{-i(kx-k'x')}d^3x\,d^3x'=(2\pi)^3\delta_{\alpha\beta}\delta(k-k')$$

联合上两式，令$k\to p$，$k'\to p'$，则有

$$\frac{m}{E}\sum_{r,s}\{[a_r(p),a_s^*(p')]_+u_\alpha^{(r)}(p)u_\beta^{(s)+}(p')$$

$$+[b_r^*(-p),b_s(-p')]_+v_\alpha^{(r)}(-p)v_\beta^{(s)+}(-p')\}$$

$$=\delta_{\alpha\beta}\delta(p-p') \qquad (6.2-8)$$

以$u_\alpha^{(m)+}(p)u_\beta^{(n)}(p')$乘上式并对$\alpha,\beta$求和利用$u,v$正交归一性，则

$$\text{左边} = \frac{m}{E}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{r,s}\{[a_r(p),a_s^*(p')]_+ u_\alpha^{(m)+}(p)u_\alpha^{(r)}(p)$$

$$\cdot u_\beta^{(s)+}(p')u_\beta^{(n)}(p') + [b_r^*(-p),b_s(-p')]_+$$

$$\cdot u_\alpha^{(m)+}(p)v_\alpha^{(r)}(-p)v_\beta^{(s)+}(-p')u_\beta^{(n)}(p')\}$$

$$= \sum_{r,s}[a_r(p),a_s^*(p')]_+\delta_{r,m}\delta_{s,n} = [a_m(p),a_n^+(p')]_+$$

$$\text{右边} = \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\delta(p-p')u_\alpha^{(m)+}(p)u_\beta^{(n)}(p')$$

$$= \sum_{\alpha}\delta(p-p')u_\alpha^{(m)+}(p)u_\alpha^{(n)}(p) = \delta_{mn}\delta(p-p')\frac{E}{m}$$

联合两式有

$$[a_m(p),a_n^*(p')]_+ = \delta_{mn}\delta(p-p')$$

同理,以 $v_\alpha^{(m)+}(-p)v_\beta^{(n)}(-p')$ 乘(6.2—8)两边并对 α,β 取和得

$$[b_n(p),b_m^*(p')]_+ = \delta_{nm}\delta(p-p')$$

利用(6.2—1)第三式可求得其余反对易关系

$$[a_m(p),a_n(p')]_+ = [b_m(p),b_n(p')]_+ = [a_m(p),b_n^*(p')]_+ = 0$$

$$[a_m^*(p),a_n^*(p')]_+ = [b_m^*(p),b_n^*(p')]_+ = [a_m^*(p),b_n(p')]_+ = 0$$

综合起来,得到如下反对易关系:

$$\left.\begin{array}{l}[a_r(p),a_{r'}^*(p')]_+ = [b_r(p),b_{r'}^*(p')]_+ = \delta_{rr'}\delta(p-p') \\ \text{其余各反对易子等于零。}\end{array}\right\} \tag{6.2-9}$$

下面,计算场的能量、动量。

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p'\sqrt{\frac{m}{E'}}$$

$$\cdot\sum_{r'=1}^{2}[a_{r'}(p')u^{(r')}(p')e^{ip'x} + b_{r'}^*(p')v^{(r')}(p')e^{-ip'x}]$$

$$\psi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}$$

$$\cdot\sum_{r=1}^{2}[a_r^*(p)u^{(r)+}(p)e^{-ipx} + b_r(p)v^{(r)+}(p)e^{ipx}]$$

$$P_\mu = - i\int d^3x\psi^+(x)\partial_\mu\psi(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\, d^3p'\, d^3x p'_\mu \frac{m}{\sqrt{EE'}}$$

$$\cdot \sum_{r,r'=1}^{2} \{a_r^*(p)a_{r'}(p')u^{(r)+}(p)u^{(r')}(p')e^{-i(p-p')x}$$

$$- b_r(p)b_{r'}^*(p')v^{(r)+}(p)v^{(r')}(p')e^{i(p-p')x}$$

$$- a_r(p)b_{r'}^*(-p')u^{(r)+}(p)v^{(r')}(p')e^{-i(p+p')x}$$

$$+ b_r(p)a_{r'}(p')v^{(r)+}(p)u^{(r')}(p')e^{i(p+p')x}\}$$

利用 δ—函数公式 $\quad \int e^{i(p-p')x}d^3x = (2\pi)^3\delta(p-p')$

和 $\quad \int F(p)\delta(p-p')d^3p' = F(p)$

上式先对 d^3x 积分，再对 d^3p 积分。积分后上式第一、二项 $p'\to p$；第三、四项 $p'\to -p$。于是在第二、四项中出现

$$u^{(r)+}(p)v^{(r')}(-p) = v^{(r)+}(p)u^{(r')}(-p) = 0$$

可以得到(注意 $p'\to\pm p$ 时 $E'\to E$)

$$P_\mu = \int d^3p\frac{m}{E}p_\mu\sum_{r,r'=1}^{2}[a_r^*(p)a_{r'}(p)u^{(r)+}(p)u^{(r')}(p)$$

$$- b_r(p)]b_{r'}^*(p)v^{(r)+}(p)v^{(r')}(p)]$$

利用(2.9—8)式所给出的正交归一条件，可得

$$P_\mu = \int d^3pp_\mu\sum_r[a_r^*(p)a_r(p) - b_r(p)b_r^*(p)]$$

场的能量(用 $b_r(p)b_r^*(p) = 1 - b_r^*(p)b_r(p)$)

$$H = P_0 = \int d^3pE\sum_{r=1}^{2}[a_r^*(p)a_r(p) + b_r^*(p)b_r(p) - 1] \tag{6.2-10}$$

场的动量

$$P_j = \int d^3pp_j\sum_{r=1}^{2}[a_r^*(p)a_r(p) + b_r^*(p)b_r(p) - 1] \tag{6.2-11}$$

将 ψ^+,ψ 代入(6.2—10)可求得场的电荷

$$Q = \int d^3p \sum_r [a_r^*(p)a_r(p) - b_r^*(p)b_r(p) + 1]e \tag{6.2-12}$$

引进粒子数算符

$$N_r^{(+)} = a_r^*(p)a_r(p) \text{ 和 } N_r^{(-)} = b_r^*(p)b_r(p) \tag{6.2-13}$$

并考虑到在完全没有粒子的真空中($N_r^{(+)}$ 和 $N_r^{(-)}$ 的本征值等于零),上式给出场的能量、动量电荷都为无穷大,这是没有物理意义的,实际上是观察不到的,应把它们抛弃掉,最后得到场的物理量

$$\left.\begin{aligned} H &= \int d^3p \sum_{r=1}^{2} [N^{(+)}(p) + N^{(-)}(p)]E_p \\ P_j &= \int d^3p \sum_{r=1}^{2} [N^{(+)}(p) + N^{(-)}(p)]P_j \\ Q &= \int d^3p \sum_{r=1}^{2} [N^{(+)}(p) - N^{(-)}(p)]e \end{aligned}\right\} \tag{6.2-14}$$

这里为了明显,将能量下标写出,E_p 表示对应动量为 p 的粒子的能量(有时为了简化常略去下标 P)。

上述的结果我们可以作如下的物理注释:由 ψ 和 ψ^+ 描写的场的粒子可分为二类,$N^{(+)}$可解释为费米子的粒子数算符,而 $N^{(-)}$则为反费米子的粒子数算符,这二类粒子的静质量为 m,自旋为$\frac{1}{2}$,但具有相反的电荷$+e$ 和$-e$。由(6.2-13)式可以看出 a^*和 a 分别代表正粒子的产生和消灭算符,b^*和 b 则分别代表反粒子产生和消灭算符。当然,在理论上,正反粒子处在对称地位,我们也可以把它们倒过来说。

在狄拉克的单粒子理论中,曾经把反粒子当作是负能态完全被占满的电子海中的一个空穴。这种解释显然是不能令人满意的,仅是历史上企图克服单粒子理论中包含着负能困难而引进来的。在这种解释中正反粒子处在不对称的地位。但在量子场论中,正反粒子处在完全对称的地位(主要的步骤是把 ψ 和 $\bar{\psi}$ 写成和荷电介子场一样),故不存在负能困难,无须用"电子海"这个荒谬的概念。

在上面我们可以看出,假使将费米子和反费米子作如下的变

换：

$$N^{(+)} \rightleftharpoons N^{(-)} \qquad e \rightleftharpoons -e$$

则(6.2－14)式的结果保持不变，这种不变性称为电荷共轭不变性。

对于旋量场的电荷共轭变换，已在前面§2.7中讨论过，这里不再重述。

§6.3　协变形式的对易关系

为使理论具有相对论不变性，我们求不同时间的对易关系。先将(6.2－3)和(6.2－4)分开成正频和负频部分：

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} a_r(p) u^{(r)}(p) e^{ipx}$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} b_r^*(p) v^{(r)}(p) e^{-ipx}$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} b_r(p) \bar{v}^{(r)}(p) e^{ipx}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} a_r^*(p) \bar{u}^{(r)} p) e^{-ipx} \qquad (6.3\text{-}1)$$

由上列四式可知

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \overline{\psi^{(-)}}(x)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = \overline{\psi^{(+)}}(x)$$

从对易关系(6.2－9)容易证明

$$[\psi_\sigma^{(+)}(x), \psi_\rho^{(-)}(x')]_+ = [\bar{\psi}_\sigma^{(-)}(x), \bar{\psi}_\rho^{(-)}(x')]_+ = 0$$

$$[\bar{\psi}_\sigma^{(+)}(x), \psi_\rho^{(+)}(x')]_+ = [\bar{\psi}_\sigma^{(-)}(x), \psi_\rho^{(-)}(x')]_+ = 0$$

$$[\psi_\sigma(x), \psi_\rho(x')]_+ = [\bar{\psi}_\sigma(x), \bar{\psi}_\rho(x')]_+ = 0 \qquad (6.3\text{-}2)$$

而

$$[\psi_\sigma(x), \bar{\psi}_\rho(x')]_+ = [\psi_\sigma^{(+)}(x), \bar{\psi}_\rho^{(-)}(x')]_+ + [\psi_\sigma^{(-)}(x), \bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')]_+ \qquad (6.3\text{-}3)$$

上式第二项

$$[\psi_\sigma^{(-)}(x),\bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, d^3p' \frac{m}{\sqrt{EE'}}\sum_{r,s=1}^{2} u_\sigma^{(r)}(p)\bar{u}_\rho^{(s)}(p')$$

$$\cdot [a_r(p), b_s^*(p')]_+ e^{i(px-p'x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, d^3p' \frac{m}{\sqrt{EE'}}\sum_{r,s=1}^{2} u_\sigma^{(r)}(p)\bar{u}_\rho^{(s)}(p')$$

$$\cdot \delta_{rs}\delta(p-p')e^{i(px-p'x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p \frac{m}{E}\sum_{r,s=1}^{2}[u(p)\bar{u}(p')]_{\sigma\rho}e^{ip(x-x')}$$

利用投影算符公式(2.9—15),上式可写成

$$[\psi_\sigma^{(-)}(x),\bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p \frac{m}{E}\left(\frac{-i\hat{p}+m}{2m}\right)_{\sigma\rho} e^{ip(x-x')}$$

$$= i(-\gamma_\mu\partial_\mu + m)_{\sigma\rho}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}e^{ip(x-x')}$$

$$= i(-\gamma_\mu\partial_\mu + m)_{\sigma\rho}\Delta^{(+)}(x-x') \quad (6.3\text{-}4)$$

其中 $$\Delta^{(+)}(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}e^{ip(x-x')} \quad (6.3-5)$$

正是第五章§5.4中关于量子标量场的协变对易关系表示式。

同理,可计算出(6.3—3)中第一项

$$[\psi_\sigma^{(+)}(x),\bar{\psi}_\rho^{(-)}(x')]_+ = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}(i\hat{p}+m)_{\sigma\rho}e^{-ip(x-x')}$$

$$= i(-\gamma_\mu\partial_\mu + m)_{\sigma\rho}\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}e^{-ip(x-x')}$$

$$= i(-\gamma_\mu\partial_\mu + m)_{\sigma\rho}\Delta^{(-)}(x-x') \quad (6.3\text{-}6)$$

其中 $$\Delta^{(-)}(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}e^{-ip(x-x')} \quad (6.3\text{-}7)$$

定义

$$\Delta(x-x') = \Delta^{(+)}(x-x') + \Delta^{(-)}(x-x')$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}[e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E}\sin p(x-x') \quad (6.3-8)$$

和 $$S_{\sigma\rho}^{(\pm)}(x-x') = (\gamma_\mu\partial_\mu - m)_{\sigma\rho}\Delta^{(\pm)}(x-x') \quad (6.3-9)$$

以及

$$
\begin{aligned}
S_{\sigma\rho}(x-x') &= S_{\sigma\rho}^{(+)}(x-x') + S_{\sigma\rho}^{(-)}(x-x') \\
&= (\gamma_\mu\partial_\mu - m)_{\sigma\rho}[\Delta^{(+)}(x-x') + \Delta^{(-)}(x-x')] \\
&= (\gamma_\mu\partial_\mu - m)_{\sigma\rho}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}\left[e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}\right]
\end{aligned}
\tag{6.3-10}
$$

于是得到如下对易关系

$$
\begin{aligned}
[\psi_\sigma^{(-)}(x), \bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')]_+ &= -iS_{\sigma\rho}^{(+)}(x-x') \\
[\psi_\sigma^{(+)}(x), \bar{\psi}_\rho^{(-)}(x')]_+ &= -iS_{\sigma\rho}^{(-)}(x-x') \\
[\psi_\sigma(x), \bar{\psi}_\rho(x')]_+ &= -iS_{\sigma\rho}(x-x')
\end{aligned}
\tag{6.3-11}
$$

应该指出：这里的 $\Delta^{(\pm)}(x-x')$ 和 $\Delta(x-x')$ 与在标量场中引进的 $\Delta^{(\pm)}$ 和 Δ 形式完全相同，只是在标量场情况下，粒子的动量和能量用 k 和 k_0 表示，这里则用 p 和 E 表示而已，所以它们也具有 Lorentz 不变性和空间反射不变性。

下面说明反对易关系(6.3－11)具有 Lorentz 变换不变性。在 Lorentz 变换下

$$
x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \qquad \text{或} \qquad x_\mu = a_{\nu\mu}x'_\nu
$$

$$
\psi_\sigma(x) \to \psi'_\sigma(x') = \Lambda_{\sigma\alpha}\psi_\alpha(x), \quad \bar{\psi}_\rho(x) \to \bar{\psi}_\rho(x') = \bar{\psi}_\beta\Lambda^{-1}_{\beta\rho}
$$

反对易关系

$$
\begin{aligned}
[\psi'^{(\mp)}_\sigma(x'_1), \bar{\psi}'^{(\pm)}_\rho(x'_2)]_+ &= \Lambda_{\sigma\alpha}[\psi_\alpha^{(\mp)}(x_1), \bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x_2)]_+\Lambda^{-1}_{\beta\rho} \\
&= \Lambda_{\sigma\alpha}[-iS_{\alpha\beta}^{(\mp)}(x_1-x_2)]\Lambda^{-1}_{\beta\rho} \\
&= -i[\Lambda(-\gamma_\mu\partial_\mu + m)\Lambda^{-1}]_{\sigma\rho} \\
&\quad \cdot \Delta^{(\pm)}(x-x')
\end{aligned}
$$

由于 $$\Delta^{(\pm)}(x_1-x_2) = \Delta^{(\pm)}(x'_1-x'_2)$$

是 Lorentz 不变的，而由 Dirac 方程 Lorentz 不变条件 $\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma_\nu$ 有

$$
\Lambda^{-1}a_{\mu\rho}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\rho}a_{\mu\nu}\gamma_\nu
$$

即有 $$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = a_{\nu\mu}\gamma_\nu$$

于是 $$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1}\partial_\mu = a_{\nu\mu}\gamma_\nu\partial_\mu = \gamma_\nu\partial'_\nu$$

所以 $$[\psi'^{(\mp)}_{\sigma}(x'_1), \bar{\psi'}^{(\pm)}(x'_2)]_+$$

$$= -i(-\gamma_\mu\partial'_\mu + m)_{\sigma\rho}\Delta^{(\pm)}(x'_1 - x'_2) = -iS^{(\pm)}_{\sigma\rho}(x'_1 - x'_2)$$

这表明协变形式反对易关系，在 x' 坐标系中的形式与在 x 坐标系中形式相同，是满足特殊相对论的协变性要求的。

§6.4 核子的同位旋

质子和中子的质量几乎相等(相差约0.13%)，如果我们忽略这个微小的质量差别，则可认为质子和中子是同一种粒子(称为核子)的二种不同荷电状态。在实验中亦确实观察到如下的过程：

$$n + \pi^+ \to p$$

$$n \to \pi^- + p$$

这说明中子吸收 π^+介子或发射 π^-介子转化为质子，完全遵守电荷守恒定律。在上式二种转化过程中，可认为是核子电荷状态的改变。由于核子有二种电荷状态，很类似于电子自旋有二个状态，以这种类似性我们引进同位旋的概念来描写核子的荷电状态。如果将质子场 ψ_p 和中子场 ψ_n 合写成

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \qquad (6.4-1)$$

则 ψ 称为核子场，与电子自旋相拟，称核子具有同位旋为$\frac{1}{2}$。由此可以想见，质子场和中子场可以统一地由同位旋空间的一个旋量来描述，下面仿照第五章§5.3处理 π 介子子同位旋的方法来讨论这一问题。

质子和中子都是自旋为$\frac{1}{2}$的费米子，故可用如下的拉氏密度

$$\mathscr{L}_p = -(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\partial_\mu\psi_p + m_p\bar{\psi}_p\psi_p) \qquad (6.4-2)$$

$$\mathscr{L}_n = -(\bar{\psi}_n\gamma_\mu\partial_\mu\psi_n + m_n\bar{\psi}_n\psi_n) \qquad (6.4-3)$$

分别描写自由质子场 ψ_p和自由中子场 ψ_n。从 $\mathscr{L}_p$(或 $\mathscr{L}_n$) 可以导出质子(或中子)场的运动方程以及场的能量、动量、角动量等。然后引入对易关系可将质子(或中子)场量子化。也可以引入一个总的拉

氏密度

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_p + \mathscr{L}_n \qquad (6.4-4)$$

将质子和中子合起来描述。容易看出，从 $\mathscr{L}$ 可导出来的运动方程将包括了从 $\mathscr{L}_p$(和 $\mathscr{L}_n$) 推导出的质子场(和中子场) 的运动方程，并且从 $\mathscr{L}$ 导出来的能量、动量和角动量等是由 $\mathscr{L}_p$ 和 $\mathscr{L}_n$ 所导出来的相应的能量、动量和角动量的和，于是可以引入 ψ_p、$\bar{\psi}_p$、ψ_n、$\bar{\psi}_n$ 之间的对易关系进行量子化。那末，从 $\mathscr{L}$ 推导出来的理论，与从 $\mathscr{L}_p$ 和 $\mathscr{L}_n$ 所推导出来的二套理论将完全等效。

假使令 $m_p = m_n = m$，并将 ψ_p 和 ψ_n 合写成为(6.4－1) 式的 ψ，于是 $\mathscr{L}$ 就可以写成

$$\mathscr{L} = -(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi) \qquad (6.4-5)$$

因为 ψ_p 和 ψ_n 各有四个分量，故 ψ 一共有八个分量，而上式中的 γ_μ 是8×8矩阵，其显示形式是

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix} = \gamma_\mu \times I \qquad (6.4-6)$$

其中 I 是2×2单位矩阵。为了书写方便，将它简写作 γ_μ。假设将(6.4－5)式中的 ψ 当作同位旋空间中的一个旋量，而 ψ_p 和 ψ_n 是这个旋量的二个分量，那末，在同位旋空间转动时，$\mathscr{L}$ 具有不变性。现在的问题是求与这个不变性相应的守恒量。

在同位旋空间作无穷小转动时，旋量将作如下的变换(参照第二章 § 2.7)

$$\left.\begin{aligned} \psi \to \psi' &= \mathscr{D}\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\mathscr{D}^* \end{aligned}\right\} \qquad (6.4-7)$$

其中 $\mathscr{D}$ 是8×8矩阵，具有如下形式

$$\mathscr{D} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}\tau_{jk} \qquad (6.4-8)$$

而

$$\tau_{jk} = \frac{1}{4}(\tau_j\tau_k - \tau_k\tau_j) \qquad (6.4-9)$$

其中 $\tau_j(j = 1,2,3)$是八行八列的矩阵，具有如下的形式：

$$\tau_1 = I \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = I \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = I \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (6.4-10)$$

其中 I 代表四行四列的单位矩阵，由于

$$\mathscr{D}^* = I - \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}\tau_{jk} \qquad (6.4-11)$$

考虑到 ε_{jk}无穷小的数量，我们有：

$$\mathscr{D}^*\mathscr{D} = I$$

在变换中 $\mathscr{L}$ 具有不变性，因此得

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right)}\delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$$

$$+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\right)}\delta\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (6.4-13)$$

应用运动方程，可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right)}\delta\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\right)}\delta\bar{\psi}\right\} = 0 \qquad (6.4-14)$$

从 $\mathscr{L}$ 的表达式(6.4－5)以及从(6.4－8)和(6.4－9)求 δψ 的表示，并代入上式可得：

$$-\varepsilon_{jk}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_{jk}\psi\right\} = 0 \qquad (6.4-15)$$

其中 ε_{jk}除了必须满足反对称条件外是任意的，因此有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{-\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_{jk}\psi\} = 0 \qquad j \neq k = 1,2,3 \quad (6.4-16)$$

上式具有微分守恒定律的形式，其相应的[illegible]

$$T = \int d^3x\psi^+\frac{1}{2}\tau\psi \qquad (6.4-17)$$

其中 τ 的三个分量 τ_1, τ_2, τ_3就是(6.4－10)中所给的[illegible]和 ψ^+之间的对易关系，[illegible]

$$[T_1, T_2] = iT_3, \quad [T_2, T_3] = iT_1, \quad [T_3, T_1] = iT_2$$

(6: 4 — 18)

我们称(6. 4—18)中的表式 T 为核子场的同位旋。不难证明，质子和中子的同位旋都等于$\frac{1}{2}$，质子和中子的同位旋第三分量分别等于$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$。

第七章　矢量场量子化

前面我们已经看到，标量场描写自旋为零的粒子（如 π 介子，K 介子等）；旋量场描写自旋为$\frac{1}{2}$的粒子（如轻子和大多数重子）。理论上可以证明自旋为 1 的粒子可用矢量场来描写。

近年来，在高能散射过程中，陆续发现一些矢量共振态，这些粒子的自旋为 1，寿命很短，而静止质量不为零，我们称其为矢量介子（如 ρ 介子，ψ/J 介子等）。我们很自然可设这种矢量介子场的运动方程为

$$(\partial_\mu^2 - m^2)A_\mu = 0 \qquad \mu = 1,2,3,4$$

令场的 Lagrange

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}[(\partial_\nu A_\mu)^2 + m^2 A_\mu^2]$$

将上式代入 Lagrange 运动方程，可得到场的运动方程。这是一个静止质量为 m 的场方程，它是标量场方程和达朗伯尔方程的推广。这里，我们不准备讨论矢量场的一般理论，而只研究它的一种特殊情况，即质量 $m=0$的情况。我们所熟悉的电磁场就是这种特例，电磁场可看成是光子的集合，光子的自旋为1。

在近代物理实验和理论发展过程，电磁场的量子现象是首先被发现的，因此它是第一个被量子化的场。由于电磁场是多分量（时空分量）以及光子的静止质量为零，使得电磁场的量子化遇到不少困难。但经过长期的努力，已经得到了自洽的比较满意的结果。

§7.1 经典场

1. Lagrange 函数和场方程

选取

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)^2 \qquad (7.1-1)$$

将上式代入 Lagrange 方程得

$$\partial^2 A_\mu = 0 \qquad 或 \qquad \square A_\mu = 0 \qquad (7.1-2)$$

这就是所知的自由电磁场方程，又称为达朗伯(d′ Alembert)方程。我们知道，由(7.1－2)所决定的场必须附加上 Lorentz 条件

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (7.1-3)$$

才代表真实的与麦克斯韦方程一致的电磁场，如果选取

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (7.1-4)$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 是电磁场张量。将上式代入 Lagrange 方程得场方程

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (7.1-5)$$

而 $F_{\mu\nu}$ 自动满足(实际上，对任何及反称张量 $F_{\mu\nu}$，下式自动满足)

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} \equiv 0 \qquad (7.1-6)$$

或

$$\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho} = 0$$

上面两个方程组就是协变形式的 Maxwell 方程组。

下面证明当场 A_μ 满足 Lorentz 条件 $\partial_\mu A_\mu = 0$ 时，(7.1－1)和(7.1－4)是等价的。

设

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)^2$$

$$\mathscr{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}[(\partial_\nu A_\mu)^2 - \partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu]$$

$$\mathscr{L} - \mathscr{L}' = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu$$

当 $\partial_\mu A_\mu = 0$ 时，$-\partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu (A_\mu \partial_\nu A_\nu - A_\nu \partial_\nu A_\mu)$

所以，

$$\mathscr{L} - \mathscr{L}' = \frac{1}{2}\partial_\mu (A_\mu \partial_\nu A_\nu - A_\nu \partial_\nu A_\mu)$$

即 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 只差一个四维散度，它对四维体积分可变成无穷远处面积分，由于无穷远处场为零所以积分为零，因此，散度项对作用量无贡献即 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 是等价的。

2. **场的能量、动量**

利用 $\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)^2$ 代入 $T_{\mu\nu}$ 的表示式(3.3—6)得

$$T_{\mu\nu} = [\partial_\nu A_\rho \partial_\mu A_\rho - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda A_\rho)^2]$$

这是一个对称的张量，场的动量是

$$P_i = \frac{1}{i}\int T_{i4}\, d^3x = -\int \partial_i A_\rho \partial_0 A_\rho\, d^3x \qquad (7.1-7)$$

场的能量是

$$P_0 = -\int T_{44}\, d^3x = \frac{1}{2}\int[(\partial_i A_\mu)^2 + (\partial_0 A_\mu)^2]\, d^3x \qquad (7.1-8)$$

当然，我们也可以借助正则形式，求得场的能量表示式。引入与 A_μ 共轭的正则动量

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu$$

于是哈密顿密度

$$\mathscr{H} = \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} = \frac{1}{2}[(\partial_i A_\mu)^2 + \dot{A}_\mu^2]$$

场的能量

$$H = \int d^3x \mathscr{H} = \frac{1}{2}\int d^3x[(\partial_i A_\mu)^2 + \dot{A}_\mu^2]$$

与(7.1—8)一致。由(7.1—1)的 Lagrange 函数求得的场的能量表示，不能给出通常的电磁场能量公式 $W = \frac{1}{2}\int(H^2 + E^2)dv$，如果利

用(7.1—4)的 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

可求得 $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = F_{\mu\nu}$,于是由(3.3—6)有

$$T_{\mu\nu} = -\left[F_{\rho\nu}\partial_\mu A_\rho - \delta_{\mu\nu}\mathscr{L}\right]$$

这个能量动量张量是不对称的。我们可以找到一个反对称张量函数

$$f_{\mu\nu\rho} = A_\mu F_{\nu\rho}$$

使得

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\rho} f_{\mu\nu\rho} \\ &= [\mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - F_{\mu\rho}F_{\rho\nu}] \end{aligned} \qquad (7.1-9)$$

是对称的,于是有

$$P_i = \frac{1}{i}\int T'_{i4}\mathrm{d}v = i\int F_{i\rho}F_{\rho 4}\mathrm{d}v = \int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_i\mathrm{d}v$$

这正是自由电磁场能量表示式。场的能量是:

$$P_0 = -\int T'_{44}\mathrm{d}v = \int (F_{4\rho}F_{\rho 4} - \mathscr{L})\mathrm{d}v = \int (E^2 - \mathscr{L})dv$$

因为 $\qquad \mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - H^2)$

所以

$$P_0 = \frac{1}{2}\int (E^2 + H^2)\mathrm{d}v。$$

[illegible]能量表示式。

[illegible]

[illegible]下,矢量场的变换是

$$\begin{aligned} A'_\sigma(x') &= a_{\sigma\rho}A_\rho(x) = (\delta_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\sigma\rho})A_\rho(x) \\ &= D_{\sigma\rho}A_\rho(x) \end{aligned} \qquad (7.1\text{-}10)$$

$D_{\sigma\rho} = \delta_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\sigma\rho}$

[illegible]面求场的自旋角动量。根据(3.4—16)式,场的自旋角动量

$$S_{\mu\nu,\lambda} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} \frac{\partial A_\sigma}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}$$

其中
$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}[(\delta_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\sigma\rho})A_\rho(x)]$$
$$= (\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma})A_\rho(x)$$
$$= (\delta_{\mu\sigma}A_\nu - \delta_{\nu\sigma}A_\mu)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)}(\partial_\nu A_\mu)^2 = -\partial_\lambda A_\sigma$$

代入得

$$S_{\mu\nu,\lambda} = (A_\mu \partial_\lambda A_\nu - A_\nu \partial_\lambda A_\mu)$$

场的自旋角动量

$$S_{ij} = i\int S_{ij,4}\,\mathrm{d}^3x = \int (A_i\partial_o A_j - A_j\partial_o A_i)\,\mathrm{d}^3x$$

写成矢量形式

$$\boldsymbol{S} = \int [\boldsymbol{A} \times \partial_o \boldsymbol{A}]\,\mathrm{d}^3x \qquad (7.1\text{-}11)$$

下面，用半经典方法说明上式代表自旋为1的场。在经典电动力学里，一个频率为 ω 沿 z 方向（$\boldsymbol{k}^\circ$方向）传播的圆极化电磁波的势函数 $\boldsymbol{A}$，可表示成（取自然单位制 $c = \hbar = 1$）

$$\boldsymbol{A} = A[\cos\omega(t-z)\boldsymbol{i}^\circ + \sin\omega(t-z)\boldsymbol{j}^\circ] \qquad (7.1-12)$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = A\omega[-\sin\omega(t-z)\boldsymbol{i}^\circ + \cos\omega(t-z)\boldsymbol{j}^\circ]$$

将上两式代入(7.1－11)得

$$\boldsymbol{S} = [\int A^2\,\mathrm{d}^3x]\omega\boldsymbol{k}^\circ \qquad \boldsymbol{k}^\circ\text{是 } z \text{ 方向单位矢量}$$

将(7.1－12)代入(7.1－8)(注意用 $A_4 = i\varphi = 0$)得场的能量

$$P_0 = \frac{1}{2}\int[(\partial_i A_\mu)^2 + (\frac{\partial A_\mu}{\partial t})^2]\,\mathrm{d}^3x = \omega^2\int A^2\,\mathrm{d}^3x$$

比较上面两式得

$$\boldsymbol{S} = \frac{P_0}{\omega}\boldsymbol{k}^\circ$$

由半经典光量子理论，一个光子的能量 $P_0 = \omega$，所以由上式得光子场的自旋

$$|S| = |k^0| = 1$$

可见，光子自旋向量是沿运动方向，其自旋为1，即电磁场是自旋为1的矢量场。自旋本来是量子概念，电磁场的自旋为1，要用二次量子化理论才能严格阐述，但上面我们用半经典理论方法给予说明。

场的电荷可由下面的计算得到。由(3.5—9)式，场的电流矢量

$$J_\mu = -ie\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}A_\sigma - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma^*)}A_\sigma^*\right\}$$

对于电磁场，A_i 是实数，A_4 是纯虚数，因此场的电流四矢量 $J_\mu = 0$，场的电荷

$$Q = -i\int J_4 \mathrm{d}^3x = 0$$

§7.2 场的量子化和粒子性

我们先把四维矢势 A_μ 看作为独立变量进行量子化，然后引进量子场论中的洛仑兹条件，给四维矢势 A_μ 之间适当的限制。象以前一样，把 A_μ 和 π_μ 认为是算符，并引进如下的对易关系：当 $t = t'$ 时，有

$$[A_\mu(x,t), \pi_\nu(x,t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta(x - x') \qquad (7.2-1)$$

其余各对算符之间都可对易。

协变形式对易关系为($t \neq t'$)

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu}D(x - x') \qquad (7.2-2)$$

此处函数 $D(x)$ 等于 §5.4 中静质量 $m = 0$ 的 $\Delta(x)$，即

$$D(x) = \Delta_{m=0}(x) \qquad (7.2-3)$$

函数 $D(x)$ 满足微分方程($k^2 = 0$)

$$\partial_\mu^2 D(x) = -k^2 D(x) = 0 \qquad (7.2-4)$$

一个波矢为 k 的电磁场，有垂直于波矢 k 方向的振动，称为电磁场的偏振或光子的极化。为了纳入协变四维形式，我们先假设有四个偏振方向。所以对场做展开时，除了按平面波展开外还要按偏振（极化）方向展开。为此引入极化单位四矢量 $\varepsilon_\mu^{(m)}(k)$，它代表电磁波的偏转或光子的极化，是一组（四个）互相正交的单位四矢量。下标 μ 表示电磁场 $A_\mu(x)$ 的第 μ 个分量，上标 m 表示第 m 个极化方向。为今后讨论方便，并能与对电磁波的观察相符合，我们采用动量空间的极化坐标系 $n^{(m)}(n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)})$，取波矢 k 与第三轴重合，$n^{(3)}(k)=\dfrac{k}{|k|}$，$k$ 与 $n^{(1)}$、$n^{(2)}$ 构成右手坐标系，时间轴与 $n^{(m)}$ 正交，如图 7—1 所示。

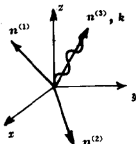


图 7—1

选取四个单位极化矢量，在极化坐标系中表示为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\mu^{(1)}(k) &= (n^{(1)}(k),0) = (n_x^{(1)},n_y^{(1)},n_z^{(1)},0)\\
\varepsilon_\mu^{(2)}(k) &= (n^{(2)}(k),0) = (n_x^{(2)},n_y^{(2)},n_z^{(2)},0)\\
\varepsilon_\mu^{(3)}(k) &= (n^{(3)}(k),0) = (n_x^{(3)},n_y^{(3)},n_z^{(3)},0)\\
\varepsilon_\mu^{(4)}(k) &= (0,1) = (0,0,0,1)
\end{aligned}\right\}\qquad(7.2-5)$$

于是四极化单位矢量具有如下的正交归一和完备性：

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(k) &= \delta_{m,m'}\\
\sum_{m}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\nu^{(m)}(k) &= \delta_{\mu\nu}
\end{aligned}\right\}\qquad(7.2-6)$$

上式第二式可这样得到：以 $\varepsilon_\nu^{(m)}(k)$ 乘第一式并对 m 求和得（略去求和号）

$$\varepsilon_\nu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(k) = \delta_{mm'}\varepsilon_\nu^{(m)}(k) = \varepsilon_\nu^{(m')}(k) = \delta_{\mu\nu}\varepsilon_\mu^{(m')}$$

比较上式两端即得。

于是电磁场按极化方向和平面波展开为

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)[a_m(k)e^{ikx} + a_m^*(k)e^{-ikx}]$$

$$= A_\mu^{(-)}(x) + A_\mu^{(+)}(x) \tag{7.2-7}$$

正则共轭动量密度

$$\pi_\mu(x) = \dot{A}_\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \sqrt{\frac{k_0}{2}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)$$

$$\cdot [a_m(k)e^{ikx} - a_m^*(k)e^{-ikx}] \tag{7.2-8}$$

对上两式进行反解，以 $e^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)k_0$ 乘前式两边，并对d^3x 积分，对 μ 求和得

$$\int d^3x e^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)k_0A_\mu(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k' \ d^3x \frac{1}{\sqrt{2k'_0}}\sum_{m'}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(k')k_0$$

$$\cdot [a_{m'}(k')e^{i(k'-k)x} + a_{m'}^*(k')e^{-i(k'+k)x}]$$

$$= (2\pi)^{3/2}\int d^3k' \frac{1}{\sqrt{2k'_0}}\sum_{m'}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(k')k_0$$

$$\cdot [a_{m'}(k')\delta(k'-k) + a_{m'}^*(k')\delta(k'+k)e^{i(k'_0+k_0)t}]$$

$$= (2\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{k_0}{2}}[\delta_{mm'}a_{m'}(k) + \varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(-k)a_{m'}^*(-k)e^{i2k_0t}]$$

$$= (2\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{k_0}{2}}[a_m(k) + \varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(-k)a_{m'}^*(-k)e^{i2k_0t}]$$

同理以 $ie^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)$ 乘(7.2－8) 两边，对d^3x 积分并对 μ 取和得

$$\int d^3x e^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)i\pi_\mu(k) = (2\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{k_0}{2}}$$

$$(a_m(k) - \varepsilon_\mu^{(m)}(k)\varepsilon_\mu^{(m')}(-k)a_{m'}^*(k)e^{i2k_0t})$$

联合上两式求得

$$a_{(m)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\int d^3x e^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)[k_0A_\mu(x) + i\pi_\mu(x)]$$

类似地，求得

$$a_{(m)}^*(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\int d^3x e^{ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(k)[k_0A_\mu(x) - i\pi_\mu(x)] \tag{7.2-9}$$

将上式代入对易关系(7.2—1)可求得如下对易关系：

$$[a_m(\boldsymbol{k}), a_n^*(\boldsymbol{k}')] = \delta_{mn}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad n,m=1,2,3,4$$

其余对易子等于零 (7.2-10)

引进场的粒子数算符 $N_m(\boldsymbol{k}) = a_m^*(\boldsymbol{k})a_m(\boldsymbol{k})$，将 $A_\mu(x)$，$\pi_\mu(x)$ 的表示式代入场的能量、动量公式(7.1—8)，(7.1—7)可求得

场的能量(略去零点能)

$$\left.\begin{aligned} H &= \int d^3k \sum_m N_m(\boldsymbol{k})k_0 \\ &= \int d^3k [N_1(\boldsymbol{k}) + N_2(\boldsymbol{k}) + N_3(\boldsymbol{k}) + N_4(\boldsymbol{k})]k_0 \end{aligned}\right\} \tag{7.2-11}$$

场的动量

$$\boldsymbol{P} = \int d^3k \sum_m N_m(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{7.2-12}$$

以上所说的电磁场量子化方法，是以 A_μ 作为独立变量，把它们都看作是厄米算符按照一般的量子化方法来进行的。在这种假定下，我们可以把所得到的结果作如下的物理解释：电磁场由四种光子组成，我们称由 $m=1,2$ 所标志的光子为横光子，由 $m=3$ 标志的光子为纵光子，由 $m=4$ 标志的光子称为类时光子或标量光子。

但是，按照上面的解释我们将遇到(7.2—7)和(7.2—10)发生矛盾的困难。因为我们把 $a_m^*(\boldsymbol{k})$ 和 $a_m(\boldsymbol{k})$ 解释为产生和消灭算符，是假定了 $a_m^*(\boldsymbol{k})$ 和 a_m 是厄米共轭的，就是说在(7.2—7)中四矢势 $A_\mu(x)$ 都是厄米算符，然而 $A_4 = i\varphi$ 在古典理论中是虚数，故在量子理论中应该是反厄米算符，这就是产生矛盾的根源。为了克服这个困难，有过好几种方法，在下面将采用 Gupta 与 Bleuler 的不定度规的方法。在这种方法中，展式(7.2—7)和对易关系(7.2—10)仍然保留，对于 $m=1,2,3,4$，算符 a_m^* 与 a_m 都是厄米共轭，亦即 $A_\mu(x)$ 都是厄米算符，但把在希耳伯空间标积的定义加以修改，使得 $A_i(x)(i=1,2,3)$ 的平均值为实数及 A_4 的平均值为虚数，这一问题我们将留在后面讨论。应用 Gupta—Bleuler 方法，还使我们处理洛仑兹条件和规范变换特别简单。

§ 7.3 Lorentz 条件

从(7.2—11)式我们看到电磁场的能量包含了四种光子的贡献。但实验观察到的(自由)电磁场只有横光子,这是由于我们把 $A_\mu(x)$ 作为独立变量,还没有加上洛仑兹条件的结果。因此我们考虑到在上述量子化方法中还应该加上一个适当的辅助条件,它相当于古典电磁场理论中的洛仑兹条件,使得纵光子和标量光子对电磁场能量的贡献互相抵消。

能否把古典的洛仑兹条件用相应的算符去代替?假使可能的话,那末

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$$

于是算符 $\partial_\mu A_\mu$ 应该和任何算符都可互相对易,但这个条件和对易关系(7.2—1)矛盾,因为

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu},A_\nu(x)\right]=i\frac{\partial}{\partial x_\nu}D(x-x')\neq 0$$

所以我们不能把古典洛仑兹条件简单地搬到量子电磁场中。

为了寻求量子电磁场理论中洛仑兹条件的适当形式,我们考虑到一个古典物理量 q 在量子物理中就相当于算符 q 的平均值,因此量子电磁场理论中的洛仑兹条件(Jermi,1932)应该满足如下的条件

$$<\left|\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right|>=0 \qquad (7.3-1)$$

这里 $|>$ 代表态函数,上式的意义是在所有可能的态函数中只有使算符 $\partial_\mu A_\mu$ 的平均值等于零的那些态函数才代表客观可能存在的物理态。也就是说,在古典理论里对 $A_\mu(x)$ 本身加以限制的洛仑兹条件,现在转移到对光子的物理态加以限制,使在实际可能出现的光子物理态中,$\partial_\mu A_\mu$ 的平均值等于零。

容易看出满足(7.3—1)式的充分条件可写成

$$\frac{\partial A_\mu^{(-)}}{\partial x_\mu}\Big| > = 0 \qquad (7.3-2)$$

因为上式的厄米共轭关系为

$$< \Big| \frac{\partial A_\mu^{(+)}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (7.3-3)$$

故 $$< \Big| \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \Big| > = < |(\partial_\mu A_\mu^{(+)} + \partial_\mu A_\mu^{(-)})| >$$

$$= < |\partial_\mu A_\mu^{(+)}| > + < |\partial_\mu A_\mu^{(-)}| > = 0$$

即满足(7.3—1)式的要求，以后我们以(7.3—2)式作为量子化后的洛仑兹条件。*

条件(7.3—1)改写为动量表示。由(7.2—7)式可得

$$\frac{\partial A_\mu^{(-)}(x)}{\partial x_\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4} ik_\mu \varepsilon_\mu^{(m)}(k) a_m(k) e^{ikx}$$

在动量表象中，按(7.2—6)式规定：$\varepsilon_\mu^{(i)}$ 只有空间分量，$\varepsilon_\mu^{(4)}$ 只有时间分量，即 $\varepsilon_j^{(i)} \neq 0$，$\varepsilon_4^{(i)} = 0$；$\varepsilon_j^{(4)} = 0, \varepsilon_4^{(4)} = 1 \neq 0$。于是

$$\left.\begin{aligned} k_\mu \varepsilon_\mu^{(1,2)}(k) &= k_i \varepsilon_i^{(1,2)} + k_4 \varepsilon_4^{(1,2)} = 0 \qquad (\because k \text{ 和 } n^{(1,2)} \text{ 正交}) \\ k_\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(k) &= k_i \varepsilon_i^{(3)} + k_4 \varepsilon_4^{(3)} = |k| = k_0 \\ k_\mu \varepsilon_\mu^{(4)}(k) &= k_i \varepsilon_i^{(4)} + k_4 \varepsilon_4^{(4)} = ik_0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.3-4)$$

$$\partial_\mu A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4} ik_\mu \varepsilon_\mu^{(m)}(k)\left[a_m(k)e^{ikx} - a_m^*(k)e^{-ikx}\right]$$

利用(7.3—4)有

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \sqrt{\frac{k_0}{2}}\left[a_3(k) + ia_4(k)\right]e^{ikx} \Bigg\}$$

---

* 值得指出，好象以 $\partial_\mu A_\mu(x)| > = 0$ 作为洛仑兹条件比(7.3－2)式更直接一些，但这个条件是不可能的。例如，它和真空态的定义 $A_\mu^{(-)}(x)|0> = 0$ 相矛盾。(阅 боголюбов 量子场导论一书)。

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \sqrt{\frac{k_0}{2}}[a_3^*(k) + ia_4^*(k)]e^{-ikx} \tag{7.3-5}$$

所以 $\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x)| > = 0$ 和 $< |\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x) = 0$ 相当于

$$\left.\begin{aligned} &[a_3(k) + ia_4(k)]| > = 0 \\ &< |[a_3^*(k) + ia_4^*(k)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3-6}$$

由(7.2—7)$A_\mu(x)$ 的表达式和(7.3 — 4)极化单位矢量 $\varepsilon_\mu^{(m)}(k)$的性质可知

$$A_4(x) \sim [a_4(k)e^{ikx} + a_4^*(k)e^{-ikx}] \tag{7.3 — 7}$$

取厄米共厄

$$A_4^+(x) \sim [a_4^+(k)e^{-ikx} + (a_4^*(k))^+ e^{ikx}] \tag{7.3 — 8}$$

因为 $A_4(x)=i\varphi$是纯虚数，应对应于反厄米算符，即应该有 $A_4^+(x) = - A_4(x)$，即

$$[a_4^+ e^{-ikx} + (a_4^*)^+ e^{ikx}] = - [a_4 e^{ikx} + a_4^* e^{-ikx}]$$

对比得

$$(a_4)^+ = - a_4^* \tag{7.3 — 9}$$

可见 a_4 和 a_4^* 是互为反厄米共厄。同理，由于 $A_i(x)$ 为实数，对应于厄米算符 a_i 和 a_i^* 互为厄米共厄算符，即

$$a_i^+ = a_i^* \tag{7.3 — 10}$$

利用上述关系和(7.3—6)可证

$$[(a_3 + ia_4)| >]^+ = < |(a_3^+ - ia_4^+) = < |(a_3^* + ia_4^*) = 0 \tag{7.3-11}$$

所以 Lorentz 条件可写成

$$(a_3 + ia_4)| > = 0 \qquad \text{或} \qquad < |(a_3^* + ia_4^*) = 0 \tag{7.3 — 12}$$

于是，纵光子和标光子的贡献（粒子数平均值）

$$\begin{aligned} < |(N_3 + N_4)| > &= < |(a_3^* a_3 + a_4^* a_4)| > \\ &= \frac{1}{2} < |[(a_3^* + ia_4^*)(a_3 - ia_4) \\ &\quad + (a_3^* - ia_4^*)(a_3 + ia_4)]| > \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.3 — 13}$$

上式的物理意义是，在量子场论中，Lorentz 条件（修正的 Lorentz 条件）导致对物理态中纵光子和标光子总和等于零的限制。

§7.4　不定度规

修正后的 Lorentz 条件，解释了实验上观察不到的纵光子和标光子，它们对物理量的贡献彼此抵消。但是，仍未能彻底解决整个理论的协变性问题，电磁场矢势的第四分量 $A_4(x)$ 仍然是反厄米算符。1950—1951年间，古普塔和勃劳楼（Gupta and Bleuler）提出了不定度规的量子化方法，将量子力学的数学形式加以扩充。进一步确定了标光子和纵光子的关系，同时又使 $A_4(x)$ 成为厄米算符，使整个理论满足协变性要求。

1. 不定度规的概念

首先介绍几个关于度规的概念

(1)时、空度规　　时空度规是对矢量的分量和长度的一种规定。

三维欧氏空间

矢量　　$x_i=(x_1,x_2,x_3)$　　$p_i=(p_1,p_2,p_3)$

长度　　$\left.\begin{aligned} dx_i^2=\delta_{ij}dx_idx_j\geqslant 0\\ dp_i^2=\delta_{ij}dp_idp_j\geqslant 0\end{aligned}\right\}$　　正定度规

度规张量是单位矩阵

$$\delta_{ij}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

四维赝欧空间（闵氏空间）

矢量　　$x_\mu=(\boldsymbol{x},x_4)=(\boldsymbol{x},it)$　　$p_\mu=(\boldsymbol{p},p_4)=(\boldsymbol{p},ip_0)$

长度　　$dx_\mu^2=\delta_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=d\boldsymbol{x}^2-dt^2=\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$ 不定度规

$$\mathrm{d}p_\mu^2 = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}p_\mu \mathrm{d}p_\nu = \mathrm{d}p^2 - \mathrm{d}p_0{}^2$$

度规张量是单位矩阵

(2)量子力学中度规(希尔伯特空间)

态矢模方　　　　$<|>\geqslant 0$ 几率为正(正定)

F 平均　　　　$<|F|>$ 厄米算符期待值为实数

$$<|F|>^+ = <|F^+|> = <|F|>$$

2. 不定度规量子化

将量子力学中度规概念加以扩充,引进一个厄米度规算符 $\eta^+ = \eta,\quad \eta^2 = 1$

$$\text{态矢模方}\qquad <|\eta|> = \begin{cases} \geqslant 0 & \text{物理态} \\ < 0 & \text{非物理态} \end{cases} \qquad (7.4-1)$$

$$F\text{平均值}\qquad <|\eta F|> \qquad (7.4-2)$$

做了上述扩充之后,态矢模方可能是正值或负值,因此 η 称为不定度规矩阵。

另外,引进不定度规算符,做了上述扩充之后,即使算符 F 是一个厄米算符,它的平均值可以是实数,也可以是虚数,即

$$<|\eta F|> = \begin{cases} \text{实数} & [\eta, F] = 0 \\ \text{虚数} & [\eta, F]_+ = 0 \end{cases} \qquad (7.4-3)$$

这就是说,对应于实数的力学量其算符是厄米算符,与 η 满足对易关系。对应于一个虚数的力学量 F(如 A_4),其算符仍然可以是厄米算符,只不过它应满足反对易关系

$$[\eta, F]_+ = 0$$

证明如下:

$$\begin{aligned} <|\eta F|>^+ &= <|F^+\eta^+|> = <|F\eta|> \\ &= \begin{cases} <|\eta F|> & ([\eta, F] = 0 \quad \text{实数}) \\ -<|\eta F|> & ([\eta, F]_+ = 0 \quad \text{虚数}) \end{cases} \end{aligned}$$

古普塔和勃劳楼建议,四维势 A_1、A_2、A_3、A_4 全部都用厄米算符来代

表，由于观察到的 A 的平均值都是实数，而观察不到的 A_4，认为它的数值是虚数，所以他们假定

$$[A,\eta]=0 \qquad [A_4,\eta]_+=0 \qquad (7.4-4)$$

在这里 $A_4(x)$ 已经认为是厄米尔算符，这样就消除§7.2中(7.2-7)式和对易关系(7.2-10)的矛盾，故以前所述的电磁场量子化的形式可以完全保留不变。和(7.4-4)式相对应，有

$$[a_j(k),\eta]=0 \qquad [a_j^*(k),\eta]=0 \qquad j=1,2,3$$
$$[a_4(k),\eta]_+=0 \qquad [a_4^*(k),\eta]_+=0 \qquad (7.4\text{-}5)$$

在引进不定度规之后，Lorentz 条件相应地修改为

$$<|\eta\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}|>=0 \qquad (7.4-6)$$

即

$$\left.\begin{aligned}<|\eta(a_3(k)+ia_4(k))|>=0\\ <|\eta(a_3^*(k)+ia_4^*(k))|>=0\end{aligned}\right\} \qquad (7.4\text{-}7)$$

上述的 Lorentz 条件(7.4-7)式可简写成

$$(a_3(k)+ia_4(k))|>=0 \qquad (7.4-8)$$

因为由上式有

$$\eta(a_3(k)+ia_4(k))|>=0 \qquad (7.4-8)$$

注意到引入不定度规之后，$A_4(x)$ 已经是厄米算符，于是应有 $A_4^\dagger(x)=A_4(x)$。(7.3-9)改写成

$$(a_4(k))^+=a_4^*(k) \qquad (7.4-9)$$

(7.3-10)$a_i^+=a_i^*$ 不变，利用对易关系(7.4-5)，对(7.4-8)取厄米共轭得

$$<|(a_3^\dagger-ia_4^\dagger)\eta^+=<|(a_3^*-ia_4^*)\eta=<|\eta(a_3^*+ia_4^*)=0 \qquad (7.4-10)$$

于是

$$<|\eta(N_3+N_4)|>=<|\eta(a_3^*a_3+a_4^*a_4)|>$$
$$=\frac{1}{2}<|[\eta(a_3^*-ia_4^*)(a_3+ia_4)+(a_3^*+ia_4^*)(a_3-ia_4)]|>=0 \qquad (7.4-11)$$

最后一步用了(7.4－8)和(7.4－10)。上式表明，由于修正后的Lorentz 条件的限制，导致了纵光子和标光子对电磁场能量、动量等物理量的贡献互相抵消，因此电磁场力学量的平均值只与横光子(N_1和 N_2)有关。

第八章　Green 函数

量子场(粒子)之间的相互作用,导致场的激发(粒子的产生)和场的激发的消失(粒子的消灭)。这些相互作用是通过波函数在时空中的传播来实现。由于信号的传播速度有限,任一时空点(x)的场变量,不可能同时产生影响传播到另一时空点(x')而起作用,但却可以在另一时刻(另一时空点)起作用。为描述场的这种传播特性,我们引进场的传播函数—传播子,即本章所要讨论的 Green 函数。

§8.1　Green 函数的形式定义

1. 阶梯函数

为了讨论的方便,我们进一步研究前面引进的阶梯函数 $\theta(k_0)$,它一般地写成:

$$\theta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0 \\ 0 & \tau<0\end{cases} \tag{8.1-1}$$

Cauchy 留数定理

$$\oint_C f(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi i Res f(b) = 2\pi i[(\omega-b)f(\omega)]|_{\omega=b}$$

可改写成

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{\omega-b}\mathrm{d}\omega \tag{8.1-2}$$

利用上式,可将阶梯函数写成

$$\theta(\tau) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\epsilon}\mathrm{d}\omega \tag{8.1-3}$$

其中 c 表示在 ω 复平面上的闭合曲线,比较上面两式,相当于

$f(\omega)=e^{-i\omega\tau}$，$b=-i\varepsilon$. 即 $\omega=-i\varepsilon$ 时存在一个极点(处于实轴下方)，如图 8－1。

为了使(8.1－3)满足定义式(8.1－1)要求，积分路径应选取下面规定：

当 $\tau>0$ 时，取 $C=C_1$，即沿实轴下方无穷大半圆积分。这时可保证被积函数按指数衰减，使积分有意义。利用高斯留数定理(8.1－2)式，(8.1－3)变成

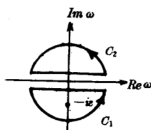


图 8－1

$$\theta(\tau)=\lim_{\varepsilon\to0}f(-i\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}e^{-\varepsilon\tau}=1 \qquad (8.1-4)$$

再考虑到C_1 下半圆的半径为∞，沿该无穷大半圆弧的积分为零，故沿 C_1 的积分等价于沿实轴$(-\infty,\infty)$的积分，因此有

$$\theta(\tau)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\varepsilon}\mathrm{d}\omega \qquad (8.1-5)$$

当 $\tau<0$ 时，若取 $C=C_2$，积分闭合曲线不包围极点$-i\varepsilon$，积分为零。因此，(8.1－5)式可做为 $\theta(\tau)$的明显表达式。对上式取导数有

$$\delta(\tau)=\frac{\mathrm{d}\theta(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega \qquad (8.1-6)$$

2. Green 函数的形式定义

为给出 Green 函数的形式定义和帮助理解它的物理涵义，我们以粒子受势场的散射为例进行说明。设自由粒子从无穷远处射入到势场 $V(x)$，受势场散射后又出射到无穷远处。这过程中，波函数是随时间演化的非定态解，求解这个问题，其方法之一，自然可以借助 Schrödinger 方程

$$(i\partial_0-H)\psi(x)=0 \qquad (8.1-7)$$

其中
$$H=-\frac{1}{2m}\nabla^2+V(x)$$

求解出 $\psi(x)$。另外，还可以借助惠更斯(Huygens)原理，按波的迭加得到任意时刻，任何时空点的解 $\psi(x')$。两种方法所得结果应该是等价的。按 Huygens 原理，假定 $\psi(x)$在某时刻为已知，则在时刻

t 波阵面上各点 x 均可看作新的波源，从它出发传播（发射）新的子波。时刻 t' 到达 x' 点的新波幅 $\psi(x',t')$ 应该正比于原来波幅 $\psi(x)$，其比例常数为 $iG(x',x)$，按 Huygens 原理，在时刻 t'，x' 点总的波幅应为

$$\psi(x')=i\int d^3x G(x',x)\psi(x) \qquad t'>t \tag{8.1-8}$$

式中 $G(x',x)$ 称为 Green 函数，在量子场论中又称为传播函数或传播子，它表示时刻 t、空间点 x 的波函数 $\psi(x)$ 对时刻 t'，x' 点新波函数 $\psi(x')$ 的影响。只要知道体系的 Green 函数，就可以从给定的波函数 $\psi(x)$，求出任何时空点的新波函数 $\psi(x')$。因此，Green 函数解法等价于解 Schrödinger 方程。

3. Green 函数的微分方程

从(8.1—8)式出发，可以导出 $G(x',x)$ 所满足的微分方程。借助阶梯函数可将(8.1—8)式改写为对任何时刻都满足的形式

$$\theta(t'-t)\psi(x')=i\int d^3x G(x',x)\psi(x)$$

用算符 $(i\partial_0-H')$ 作用于上式两边，注意到 Schrödinger 方程对任何时刻 t' 的 $\psi(x')$ 都成立，以及(8.1—6)式，可得

$$(i\partial'_0-H')[\theta(t'-t)\psi(x')]=i\delta(t'-t)\psi(x')$$
$$=i\int d^3x(i\partial'_0-H')G(x',x)\psi(x)$$

利用 $$\delta(t'-t)\psi(x')=\delta(t'-t)\int\psi(x)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')d^3x$$

上式写成

$$i\delta(t'-t)\int\psi(x)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')d^3x=i\int d^3x(i\partial'_0-H')G(x',x)\psi(x)$$

由于 $\psi(x)$ 的任意性，故有

$$(i\partial_0-H')G(x',x)=\delta(x-x') \tag{8.1-9}$$

上式就是 Schrödinger 方程的 Green 函数所满足的微分方程。根据假定，边界条件为

$$G(x',x)|_{t'<t}=0 \tag{8.1-10}$$

对于自由粒子，$H'=-\frac{1}{2m}\nabla'^2$，从 x 时空点的单位子波源发出而到达 x' 时空点的波，仅依赖于间隔 $(x'-x)$，所以(8.1－9)式可写成

$$(i\partial_0'+\frac{1}{2m}\nabla'^2)G(x'-x)=\delta(x'-x) \qquad (8.1-11)$$

这就是自由的非相对论微观粒子(它的波函数满足不存在势场时的 Schrödinger 方程)对应的 Green 函数所满足的微分方程。

类似地，可以求得其它自由场的 Green 函数所满足的微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\text{Klein—Gordon 场}\quad (\partial_\mu^2-m^2)G(x'-x)=-\delta(x'-x)\\&\text{Dirac 场}\quad (\gamma_\mu\partial_\mu+m)G(x'-x)=-\delta(x'-x)\\&\text{电磁场}\quad \partial_\mu^2G(x'-x)=-\delta(x'-x)\end{aligned}\right\}(8.1-12)$$

分别求解各方程，可得各种场的 Green 函数。

§8.2 标量场的传播函数

标量场一般写成(见5.2－24)

$$\varphi(x)=\varphi^{(-)}(x)+\varphi^{(+)}(x)$$

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}a(\boldsymbol{k})$$

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx}b^*(\boldsymbol{k})$$

$$\varphi^*(x)=\varphi^{*(-)}(x)+\varphi^{*(+)}(x)$$

$$\varphi^{*(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}b(\boldsymbol{k})$$

$$\varphi^{*(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx}a^*(\boldsymbol{k})$$

1. 协变对易关系

$$[\varphi(x),\varphi^*(x')]$$
$$=[(\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)),(\varphi^{*(+)}(x)+\varphi^{*(-)}(x'))]$$

$$=[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{*(+)}(x')]+[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{*(-)}(x')]$$
$$+[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{*(+)}(x')]+[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{*(-)}(x')] \tag{8.2-1}$$

注意前式有

$$[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{*(+)}(x')]\sim[b^{*}(k),a^{*}(k')]=0$$
$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{*(-)}(x')]\sim[a(k),b(k')]=0$$
$$\begin{aligned}[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{*(-)}(x')]\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3kd^3k'}{2\sqrt{\omega_k\omega_k'}}e^{-i(kx-k'x')}[b^{+}(k),b(k')]\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3kd^3k'}{2\sqrt{\omega_k\omega_k'}}e^{-i(kx-k'x')}\delta(k-k')\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{-ik(x-x')}\\
&=i\Delta^{(-)}(x-x')\end{aligned} \tag{8.2-2}$$

同理
$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{*(+)}(x')]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{ik(x-x')}=i\Delta^{(+)}(x-x') \tag{8.2-3}$$

联合上面结果有

$$[\varphi(x),\varphi^{*}(x')]=i\Delta^{(-)}(x-x')+i\Delta^{(+)}(x-x')=i\Delta(x-x') \tag{8.2-4}$$

这结果与(5.1—50)一致。

2.函数 $\Delta^{(\pm)}(x)$、$\Delta(x)$的回路积分表示

由(8.2—2)和留数定理，我们可将 $\Delta^{(+)}$在复 k_0平面上用回路积分表示出来。即

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(x)&=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{ikx}=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{ik\cdot x}\frac{e^{-i\omega_k x_0}}{2\omega_k}\\
&=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{ik\cdot x}\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+}dk_0\frac{e^{-ik_0x_0}}{(k_0-\omega_k)(k_0+\omega_k)}\end{aligned} \tag{8.2-5}$$

最后一步利用了留数定理

$$f(b)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(k_0)}{(k_0-b)}dk_0$$

$$f(k_0)=\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0+\omega_k}\qquad \omega_k>0 \tag{8.2-6}$$

利用 $k^2+m^2=\omega_k^2-k_0^2$，(8.2—5)改写成

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+}\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{8.2-7}$$

上式是有明显的 Lorentz 不变形式。

类似地

$$\begin{aligned}\Delta^{(-)}(x)&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}e^{-ikx}=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k e^{-ik\cdot x}\frac{e^{i\omega_k x_0}}{2\omega_k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k e^{ik\cdot x}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\mathrm{d}k_0\,\frac{e^{-ik_0x_0}}{(k_0+\omega_k)(k_0-\omega_k)}\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-}\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}\end{aligned} \tag{8.2-8}$$

联合上两式可得

$$\Delta(x)=\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{8.2-9}$$

积分回路 $C^\pm$ 和 C 如图8—2所示

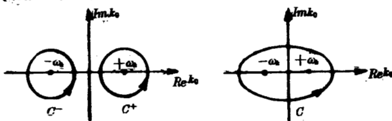


图 8—2

3. 传播函数 $\Delta_F(x)$

量子标量场的传播函数定义为

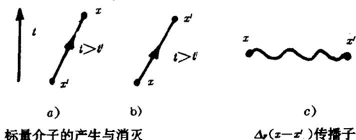
$$\begin{aligned}\Delta_F(x-x')&=\theta(t-t')[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{*(+)}(x')]\\&\quad+\theta(t'-t)[\varphi^{*(-)}(x'),\varphi^{(+)}(x)]\\&=\theta(t-t')i\Delta^{(+)}(x-x')-\theta(t'-t)\Delta^{(-)}(x-x')\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}[\theta(t-t')e^{ik(x-x')}+\theta(t'-t)e^{-ik(x-x')}]\end{aligned} \tag{8.2-10}$$

即

$$\Delta_F(x-x')=\begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-x'), & x_0-x'_0>0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-x'), & x_0-x'_0<0 \end{cases}$$

(8.2—11)

可见，当 $x_0-x_0'>0$ 时，第一项不为零，先在 x' 点，由 $\varphi^{*(+)}(x')$ 产生一个标量介子，传播到 x 点被 $\varphi^{(-)}(x)$ 消灭，如图 8－3a 所示。当 $x_0-x'_0<0$ 时，第二项起作用，表示在 x 点 $\varphi^{(+)}(x)$ 产生一个标量介子，传播到 x' 点被 $\varphi^{*(-)}(x')$ 消灭，如图 8－3b 所示。$\Delta_F(x-x')$ 代表量子介子场在 (x,x') 点之间传播的总效应。如图 8－3c 所示。由(8.2－10)可见，$\Delta_F(x-x')$ 对 $x-x'$ 是偶函数，故总传播效应是无方向性的，所以在 x 和 x' 点之间用一条无方向的波纹线表示。



标量介子的产生与消灭　　　$\Delta_F(x-x')$传播子

图8—3

利用留数定理，将前式换成在 k_0复平面上积分。对(8.2－10)做变换 $x-x'\to x$，则当 $x_0>0$时，其第二项等于零，仅存第一项为

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}\theta(x_0)e^{ik\cdot x-i\omega x_0}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{ik\cdot x}\frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_F}\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0-\omega_k}dk_0$$

(8.2 － 12)

积分回路 C_F 是在下半平面无限大半圆上闭合。在极点处留数为

$$\oint_{C_F}\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0-\omega_k}dk_0=-2\pi ie^{-i\omega_kx_0}$$

当 $x_0<0$时，(8.2—10)式只存第二项

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}\theta(-x_0)e^{ik\cdot x+i\omega_kx_0}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{ik\cdot x}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_F}\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0+\omega_k}dk_0 \qquad (8.2-13)$$

积分回路必须在上半平面的无限大半圆上闭合，在极点 $k_0=-\omega_k$ 处留数为

$$\oint_{C_F}\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0+\omega_k}\mathrm{d}k_0=2\pi i e^{i\omega_k x_0}$$

综合上面两式，考虑到在无限大半圆弧上积分为零，则有

$$\begin{aligned}\Delta_F(x)&=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\frac{1}{2\pi i}\int_{C_F}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\omega_k}\left(\frac{1}{k_0-\omega_k}-\frac{1}{k_0+\omega_k}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ik_0x_0}\\&=\frac{i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\int_{C_F}\mathrm{d}k_0\frac{e^{ikx}}{(k_0-\omega_k)(k_0+\omega_k)}\\&=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\mathrm{d}^4k\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}\end{aligned}\qquad(8.2-14)$$

积分回路如图8－4所示。显然这是一个 Lorentz 不变传播函数。

为了今后应用的方便，我们可以移动极点使 $k_0=\pm\omega\mp i\varepsilon$，于是(8.2－14)式可改写成$(\varepsilon\to0)$

$$\Delta_F(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2-i\varepsilon}\qquad(8.2-15)$$

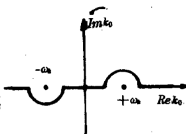


图 8－4

将 $\Delta_F(x)$作 Fourier 变换，有

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k e^{ikx}\Delta_F(k)\qquad(8.2-16)$$

对比上两式得到在四动量空间的传播函数

$$\Delta_F(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-i}{k^2+m^2-i\varepsilon}\qquad(8.2-17)$$

这是一个很有用的表达式(为简明，书写时常略去微量 ε)，在今后计算中常常用到。容易得到

$$(\partial_\mu^2-m^2)\Delta_F(x)=i\delta(x)\qquad(8.2-18)$$

4. **推迟和超前传播函数 Δ_{ret}、Δ_{adv}**

推迟和超前传播函数分别定义为：

$$\Delta_{ret}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_r}\mathrm{d}^4k\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}$$

和

$$\Delta_{adv}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_a} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}\Bigg| \tag{8.2-19}$$

其积分回路如图8－5所示

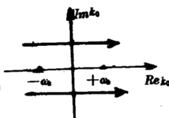


图 8－5

对推迟传播函数 $\Delta_{ret}(x)$，当 $x_0>0$时，其积分回路是沿实轴在下半平面构成无穷大的半圆闭合回路，不为零；当 $x_0<0$ 时，它等于零。这也就是被称为推迟传播函数(Green 函数)的原因，即

$$\Delta_{ret}(x)=\begin{cases}-\Delta(x) & x_0>0\\ 0 & x_0<0\end{cases} \tag{8.2-20}$$

同样，对超前传播函数 $\Delta_{adv}(x)$，当 $x_0<0$时，其积分路径沿实轴在上半平面构成无穷大半圆闭合回路，不为零；$x_0>0$时，它等于零，所以称为超前传播函数，即

$$\Delta_{adv}(x) = \begin{cases}0 & x_0 > 0\\ \Delta(x) & x_0 < 0\end{cases}$$

容易得到

$$\begin{aligned}(\partial_\mu^2 - m^2)\Delta_{ret}(x) &= (\partial_\mu^2 - m^2)\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx} = -\delta(x)\end{aligned} \tag{8.2-21}$$

同理

$$(\partial_\mu^2-m^2)\Delta_{adv}(x)=-\delta(x) \tag{8.2-22}$$

由此，我们可以得出结论：有限回路的积分 $\Delta^{(\pm)}(x)$、$\Delta(x)$满足齐次 Klein－Gordon 方程

$$\left.\begin{aligned}(\partial_\mu^2-m^2)\Delta(x)=0\\ (\partial_\mu^2-m^2)\Delta^{(\pm)}(x)=0\end{aligned}\right\} \tag{8.2-23}$$

而无限回路的积分，$\Delta_F(x)$，$\Delta_{ret}(x)$，$\Delta_{adv}(x)$满足含有单位源(用函数 $\delta(x)$表示)的非齐次 Klein－Gordon 方程，故这些函数又称为 Green 函数。

$$\left.\begin{aligned}(\partial_\mu^2-m^2)\Delta_F(x)&=i\delta(x)\\(\partial_\mu^2-m^2)\Delta_{ret}(x)&=-\delta(x)\\(\partial_\mu^2-m^2)\Delta_{adv}(x)&=-\delta(x)\end{aligned}\right\}\qquad(8.2-24)$$

§8.3 电磁场的传播函数

以前面标量场的讨论为基础，按照同样的理论模式，可得到电磁场的有关函数。

电磁场和标量介子场都是具有整数自旋的粒子(Boson)，因而理论模式有许多类似的地方，只不过电磁场是一种四维矢量场，因而有四个分量(每个分量相当于一个标量场)。因此，只需将标量场所得结果，令 $m=0$，并适当注意电磁场的矢量性质，有4个分量，即可得到对电磁场适用的公式。

1. $D^{(\pm)}(x)$、$D(x)$函数

电磁场算符写成(由(7.2—7))

$$\begin{aligned}A_\mu(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^m(k)\left[a_m(k)e^{ikx}+a_m^*(k)e^{-ikx}\right]\\&=A_\mu^{(-)}(x)+A_\mu^{(+)}(x)\end{aligned}$$

容易得到

$$\left.\begin{aligned}\left[A_\mu^{(-)}(x),A_\nu^{(+)}(x')\right]&=iD^{(+)}(x-x')\delta_{\mu\nu}\\\left[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(x')\right]&=iD^{(-)}(x-x')\delta_{\mu\nu}\end{aligned}\right\}\qquad(8.3-1)$$

其中

$$D^{(\pm)}(x)=\frac{\mp i}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{1}{2\omega_k}e^{\pm ikx}\qquad(8.3-2)$$

定义 $\qquad D(x)=D^{(+)}(x)+D^{(-)}(x)$

则得协变对易关系

$$\begin{aligned}\left[A_\mu(x),A_\nu(x')\right]&=\left[A^{(-)}(x),A^{(+)}(x')\right]+\left[A^{(+)}(x),A^{(-)}(x')\right]\\&=i\left[D^{(+)}(x-x')+D^{(-)}(x-x')\right]\delta_{\mu\nu}\\&=iD(x-x')\delta_{\mu\nu}\end{aligned}\qquad(8.3-3)$$

与标量场对比有

$$
\left.\begin{aligned}
D^{(\pm)}(x) &= \Delta^{(\pm)}(x)\big|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^\pm} \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2} \\
D(x) &= \Delta(x)\big|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C} \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2}
\end{aligned}\right\} \quad (8.3-4)
$$

可见 $D^{(\pm)}(x)$、$D(x)$都是 Lorentz 不变函数。

2. 传播函数 $D_F(x)$

电磁场的传播函数定义为

$$
\begin{aligned}
D_F(x-x')_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} D_F(x-x') \\
&= \theta(t-t')[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x)] \\
&\quad + \theta(t'-t)[A_\nu^{(-)}(x'), A_\mu^{(+)}(x)] \qquad (8.3-5)
\end{aligned}
$$

将(8.3—1)—(8.3—3)代入上式得

$$
\begin{aligned}
D_F(x-x') &= \theta(t-t')iD^{(+)}(x-x') - \theta(t'-t)iD^{(-)}(x-x') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}[\theta(t-t')e^{ik(x-x')} + \theta(t'-t)e^{-ik(x-x')}]
\end{aligned}
$$

$$(8.3-6)$$

即

$$
D_F(x-x') = \begin{cases} iD^{(+)}(x-x'), & x_0 - x'_0 > 0 \\ -iD^{(-)}(x-x'), & x_0 - x'_0 < 0 \end{cases} \qquad (8.3-7)
$$

由(8.3—5)可见，当 $x_0 > x'_0$时，第一项起作用，其物理涵义是：先在 x' 时空点由算符 $A_\nu^{(+)}(x')$产生一个 ν 分量的光子，它向时空点 x 运动，到达 x 点时，转化成 μ 分量的光子，被算符 $A_\mu^{(-)}(x)$湮灭，如图8—6a 虚线所示；当 $x'_0 > x_0$时，第二项起作用，先在 x 时空点，由算符 $A_\mu^{(+)}(x)$产生一个 μ 分量的光子，到达 x' 时空点处，转化成 ν 分量的光子，被算符 $A_\nu^{(-)}(x')$湮没，如图8—6b 虚线所示。由与(8.3—5)等效的(8.3—6)可见，$D_F(x-x')$是 $x-x'$ 的偶函数，当 $x-x' \rightleftharpoons -(x-x')$时，$D_F(x-x')$不改变，所以它的总传播效应是无方向性的，故用无方向的虚线段图8—6c 表示电磁场的传播函数。

用类似上节的做法，借助留数定理，将(8.3—6)变成复 k_0平面上积分，最后得电磁场 $D_F(x)$的协变形式 ·

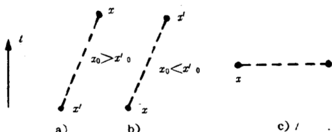


图 8—6

$$D_F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon}e^{ikx} \qquad (8.3-8)$$

其 Fourier 变换式

$$D_F(k)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-i}{k^2-i\varepsilon} \qquad (8.3-9)$$

同上节一样，为了书写方便，上两式常略去微量 ε 和极限符号不写，但应理解为 $D_F(x)$、$D_F(k)$ 由上两式表示。

另外，可证 $D(x)$ 满足齐次达朗伯尔方程

$$\partial_\mu^2 D(x)=\partial_\mu^2(\Delta(x)|_{m=0})=(\partial_\mu^2\Delta(x))|_{m=0}=0 \qquad (8.3-10)$$

$D_F(x)$ 满足单位源的非齐次达朗伯尔方程

$$\partial_\mu^2 D_F(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k(-k^2)\frac{1}{k^2}e^{ikx}$$
$$=i\delta(x)$$

所以 $D_F(x)$ 就是电磁场方程 $\partial_\mu^2 A_\mu(x)=0$ 的 Green 函数。

§8.4 旋量场的传播函数

利用前面第六章§6.3的结果，按照前两节的理论模式，可以得到旋量场的传播函数。

1. $S^{(\pm)}(x)$、$S(x)$ 函数

对旋量场，按第六章§6.3，有如下协变形式的反对易关系

$$\left.\begin{aligned}&[\psi_\sigma^{(-)}(x),\bar\psi_\rho^{(+)}(x')]_+=-iS_{\sigma\rho}^{(+)}(x-x')\\&[\psi_\sigma^{(+)}(x),\bar\psi_\rho^{(-)}(x')]_+=-iS_{\sigma\rho}^{(-)}(x-x')\end{aligned}\right|$$

$$[\psi_\sigma(x),\bar{\psi}_\rho(x')]_+=-iS_{\sigma\rho}(x-x') \tag{8.4-1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} S_{(\pm)}(x) &= (\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(\pm)}(x) \\ S(x) &= (\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta(x) \end{aligned}\right\} \tag{8.4-2}$$

将$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)$作用于上式两边，则有

$$\begin{aligned}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)S^{(\pm)}(x-x') &= (\gamma_\mu\partial_\mu+m)(\gamma_\nu\partial_\nu-m)\Delta^{(\pm)}(x-x') \\ &= (\gamma_\mu\gamma_\nu\partial_\mu\partial_\nu-m^2)\Delta^{(\pm)}(x-x') \\ &= [\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)\partial_\mu\partial_\nu-m^2]\Delta^{(\pm)}(x-x') \\ &= (\partial_\mu^2-m^2)\Delta^{(\pm)}(x-x')=0\end{aligned}$$

上式最后一步用了$\Delta^{(\pm)}(x-x')$满足 Klein—Gordon 方程。可见$S^{(\pm)}(x-x')$满足 Dirac 方程，即

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_\mu\partial_\mu+m)S^{(\pm)}(x-x') &= 0 \\ (\gamma_\mu\partial_\mu+m)S(x-x') &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.4-3}$$

同理

2. **传播函数** $S_F(x-x')$

旋量场的传播函数定义为

$$\begin{aligned} S_F(x-x')_{\sigma\rho} &= \theta(t-t')[\psi_\sigma^{(-)}(x),\bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')]_+ \\ &\quad -\theta(t'-t)[\bar{\psi}_\rho^{(-)}(x'),\psi_\sigma^{(+)}(x)]_+ \\ &= (-\gamma_\mu\partial_\mu+m)_{\sigma\rho}[i\theta(t-t')\Delta^{(+)}(x-x') \\ &\quad -i\theta(t'-t)\Delta^{(-)}(x-x')] \\ &= (-\gamma_\mu\partial_\mu+m)_{\sigma\rho}\Delta_F(x-x') \end{aligned} \tag{8.4-4}$$

上式最后一步用了(8.2—10)式。

由(8.2—16)、(8.2—1)有标量场传播函数($k\to p$)

$$\Delta_F(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2-i\epsilon}$$

代入得

$$S_F(x-x')_{\sigma\rho}=(-\gamma_\mu\partial_\mu+m)_{\sigma\rho}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2-i\epsilon} \tag{8.4-5}$$

用$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)$从左边作用于上式得

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)S_F(x-x') = (\partial_\mu^2 - m^2)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^4p(-p^2-m^2)\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ip(x-x')} = -i\delta(x-x') \tag{8.4-6}$$

可见，$S_F(x-x')$满足单位源的 Dirac 方程，故又叫做 Dirac 方程的Green 函数。

从 $S_F(x-x')$的定义可看出它的物理涵义。当 $x_0>x'_0$时，(8.4－4)的第一项起作用，这表示在 x' 点由算符 $\bar{\psi}_\rho^{(+)}(x')$产生一个电子，而到达 x 点时被算符 $\psi_\sigma^{(-)}(x)$湮没掉，如图8－7a；

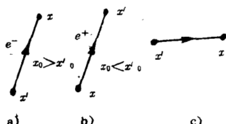


图 8－7

当 $x_0<x'_0$时，第二项起作用，这表示在 x 点由算符 $\psi_\sigma^{(+)}(x)$产生一个正电子，到达 x' 点时被算符$\bar{\psi}_\rho^{(-)}(x')$湮没掉，如图8－7b；$S_F(x-x')$是综合两者，代表由 x' 点到 x 点正、反粒都有贡献的总的传播效应。

将(8.2－10)代入(8.4－4)，利用(8.4－2)得

$$S_F(x-x') = -(\gamma_\mu\partial_\mu - m)\begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-x') \\ -i\Delta^{(-)}(x-x') \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -iS^{(+)}(x-x') & \text{当 } x_0>x'_0 \\ iS^{(-)}(x-x') & \text{当 } x_0<x'_0 \end{cases} \tag{8.4-7}$$

上式也可写成

$$S_F(x-x') = -(\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Delta_F(x-x') \tag{8.4-8}$$

或将 $\Delta_F(x-x')$代入并利用 $i\hat{p}=i\gamma_\mu p_\mu=\gamma_\mu\partial_\mu$ 得

$$S_F(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}e^{ip(x-x')} \tag{8.4-9}$$

第九章　量子场的相互作用

§9.1　相互作用的描述

在前面我们已经看到，一个量子化了的场系统可视为同类粒子的集合，如果按照动量分类，并设动量有分立的值 $k_1,k_2\cdots$ 等，则这个集合的态由占据各种动量数值的粒子数目 $n_{k_1},n_{k_2}\cdots$ 等决定，故在这种表象中，态函数可表示为 $\psi(n_{k_1},n_{k_2}\cdots)$，表示具有动量 k_1 的粒子 n_{k_1} 个，动量 k_2 的粒子 n_{k_2} 个…。如果两个场发生相互作用，作用后，两个场都发生变化，而这种可观察到的变化就是占据各个态（相应于不同动量）的粒子数目的变化，我们就是利用这一观念来描述场的相互作用。为了说明这一点，我们用下面直观的图象做比喻。

设在一方箱中（图9－1a）有由许多各种动量的电子组成的系统，一个动量为 k_1 的电子和箱壁碰撞后反跳回来，动量变成 k_2，这样我们就可以把这种相互作用描述为消灭了一个动量为 k_1 的电子和产生了一个动量为 k_2 的电子。由于这些电子是不可区分的同类粒子，故认为反跳回来的电子是原来的电子或是新的电子都没有关系。这样我们就可以用消灭粒子和产生粒子的观念来描述相互作用所引起的各个态的粒子数目的变化。如果系统是由电子（相应于电子场）和光子（相应于电磁场）组成，那么，我们可以用光子代替上述的箱壁，如图9－1b。这种图形就是以后我们将要讨论的费曼图。

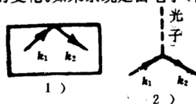


图 9—1

在量子场论中，相互作用的数学形式常用在自由场（无相互作用）的拉氏密度 $\mathscr{L}_0$中加上一附加项 $\mathscr{L}_i$ 来表达，相互作用系统的拉氏密度为：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_i$$

其中 $\mathscr{L}_0$为两个自由场的拉氏密度之和，$\mathscr{L}_i$是由于相互作用所引起的附加项，称为相互作用拉氏密度。$\mathscr{L}_i$ 常含有不同场的场算符的连乘积，在利用 Lagrange 方程导出一种场的场方程时，常出现第二种场的场算符。因此，两种场的运动不是互相独立的，而是彼此关联着。$\mathscr{L}_i$常表示成产生和消算符的函数。

$\mathscr{L}$（包括 $\mathscr{L}_i$）的选择必须受到一些基本原理和实验证实了的守恒定律的限制。有些基本原理和守恒定律是对任何自由场以及场之间相互作用都必须遵循的，如相对论中相对性原理，要求 $\mathscr{L}$ 具有 Lorentz 变换不变性；能、动量守恒定律要求 $\mathscr{L}$ 对时空平移变换具有不变性；角动量守恒要求 $\mathscr{L}$ 在空间坐标旋转下为不变量；电荷守恒要求 $\mathscr{L}$ 在规范变换下不变；重子数守恒等要求 $\mathscr{L}$ 在相应的位相变换下为不变量。此外，还有个别相互作用所要求的局部守恒定律：例如宇称守恒要求空间反射不变；电荷共轭不变，同位旋守恒要求具有电荷无关性等等。守恒定律的建立受到实验的启示而且要继续受到实验的检验。如宇称守恒定律，原来认为是普遍守恒定律，却被弱作用宇称不守恒的实验事实所否定，成为一个局部守恒定律。

尽管 $\mathscr{L}$（含 $\mathscr{L}_i$）的选取受到一些守恒定律的限制，但具体形式还有很大的任意性。不过近年发展起来的规范场论，对规范粒子和其它粒子的相互作用形式（或者说 $\mathscr{L}_i$），可借助局域规范不变性的要求唯一确定下来。这些我们将在规范场一章做进一步讨论。

§9.2 相互作用的分类

1.按相互作用形式分类

根据目前实验总结，场的相互作用形式主要分成 Yakawa 型

和 Fermi 型。Yakawa 型相互作用拉氏密度 $\mathscr{L}_i$ 由两个费米场和一个玻色场构成(例如核子与 π 介子的相互作用);Fermi 型相互作用拉氏密度 $\mathscr{L}_i$ 由四个费米场构成(例如普适的 V—A 相互作用)。

(1)玻色场和费米场的 Yakawa 型相互作用

这两种场的相互作用有下面几种形式。

a. 标量场与旋量场的作用

$$\begin{cases} \bar{\psi}\psi\varphi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \end{cases} \tag{9.2-1}$$

其中,$\bar{\psi}$、ψ 为旋量,φ 为标量。

目前尚未发现真正的标量粒子,因此这种相互作用只是理论形式上的。

b. 赝标量场与旋量场的作用

$$\begin{cases} \bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi & \text{赝标耦合} \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} & \text{赝矢耦合} \end{cases} \tag{9.2-2}$$

其中 φ 为赝标量,因 π 介子的自旋为零,宇称为负,故用赝标量 φ 来描述。这两种形式一般用来描述 π 介子与胶子的作用,这两种作用在研究核力和 π 介子对核子散射时是非常重要的。这两种作用之中主要是第一种起作用。

c. 矢量场与旋量场的作用

$$\begin{cases} \bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi F_{\mu\nu} \end{cases} \tag{9.2-3}$$

从理论上两种形式都可以描写电子(或质子)与光子的作用,但从量子电动力学中各种理论与实验比较,现在已经精确地肯定,第一种形式起最主要作用。因此,在量子电动力学(QED)中,光子与电子作用,应以第一种形式表示。

(2)费米场与费米场的 Fermi 作用

费米场与费米场(或旋量场与旋量场)的作用最典型的例子就是 β^- 衰变与 $\mu^\pm$ 介子衰变:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$$

也称为四旋量场函数直接作用或 Fermi 型作用。一般具有五种形式

$$\left.\begin{array}{ll} (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) & \text{标量耦合} \\ (\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi) & \text{赝标量耦合} \\ (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) & \text{矢量耦合} \\ (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) & \text{赝矢量耦合} \\ (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi) & \text{张量耦合} \end{array}\right\} \tag{9.2-4}$$

(3)玻色场与玻色场作用

常见的有两种形式

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\varphi\varphi\varphi \\ (\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^*\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu})A_\mu \end{array}\right\} \tag{9.2-5}$$

其中 φ 是赝标量玻色场，A_μ 是矢量玻色场.

第一种是研究 π 介子与 π 介子之间的相互作用。第二种是研究 π 介子与光子的相互作用。

2. 按相互作用强度分类

场的相互作用强度，由相互作用常数来表达。严格地说，两种场的相互作用强度(相互作用常数)应该与这两种场的基本粒子的内部结构有关。但到现在为止，我们对基本粒子的内部结构知道不多，因此，现代场论中的作用常数还不能从理论上求得，而是根据实验数据间接求得的。比如，电子和电磁场的作用常数 e(电荷)，我们可以利用电子在电磁场中的运动规律 和实验比较求得。

场的相互作用常数常称为“荷”，如电子与电磁场的相互作用常数称为电荷，核子与介子场的作用常数称为“核荷”。由于电动力学理论比较完整，并且静电库仑力是长程力，可用宏观方法进行测量，因此，电荷的大小今天已精确地确定了。但“核荷”的情况不同，因为介子场理论还未完善，核荷的大小是随不同的理论和处理方法而有一定差异，至于其他作用常数的大小更是如此。

由于作用常数 g^2除以 $\hbar c$ 是一个无量纲的量，故通常用 $g^2/\hbar c$ 等比较作用常数的大小。

按作用常数大小(作用强度大小)可分为四类：

(1)强相互作用

a.超强作用　　强子内部组元即层子(夸克 quark)与胶子(gluon)相互作用。对这种超强作用，近年来的研究有很大发展，已形成一门类似量子电动力学(QED)的量子色动力学(QCD)。超强作用过程除满足已知的守恒定律外，还满足色荷守恒。尽管如此，量子色动力学还不是一门成熟的理论。

b.强作用　　π 介子与重子相互作用

研究这些粒子的产生和散射时得到耦合常数(自然单位制下同)

$$\frac{g_\pi^2}{4\pi} \sim 15$$

c.中强作用　　K 介子与重子相互作用

耦合常数

$$\frac{g_k^2}{4\pi} \sim 1$$

在强作用过程中，除了满足能量、动量、角动量、粒子数、电荷守恒定律外，还满足宇称、电荷共轭、同位旋等守恒定律。

(2)电磁相互作用　　荷电粒子与光子相互作用

耦合常数

$$\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

除了满足能量、动量、角动量、电荷、粒子数守恒外，还满足宇称守恒，电荷共轭不变及同位旋第三分量守恒，但总同位旋不守恒。媒介场量子是光子(γ)(自旋$=1, m=0$)。

(3)弱相互作用　　粒子衰变过程及轻子间相互作用

其强度为10^{-11}数量级。

在弱作用中，宇称 P 和电荷共轭 C 分别不守恒，但两者复合是守恒的(CP 守恒)。实验还出现了破坏 CP 守恒的超弱相互作用，同位旋守恒也遭到破坏。媒介场量子是中间玻色子($W^{\pm}, Z^0$)

(自旋为1)。

(4)引力作用　　存在于一切物体之间的相互作用

强度为10^{-39}数量级，因为很弱，故在基本粒子相互作用过程中常忽略它。媒介场量子是引力子(自旋 $S=2,m=0$)，尚未发现。

由此可见，相互作用愈强，所满足的守恒定律愈多，$\mathscr{L}_i$具有的对称性也愈高。

应该指出，可能有多种相互作用参与同一过程。例如在有强作用的粒子的衰变中就应考虑强作用的影响。另外，当$\mathscr{L}_i$中含有场量的微商$\partial_\mu\varphi$时称为微分相互作用，否则称为直接相互作用；只有同一时空点的场量才有相互作用时，称为定域相互作用，否则称为非定域相互作用。各种量子场之间究竟有什么相互作用?极少数是按经典物理中已经确定的规律决定，如电磁相互作用。大多数相互作用是在实验结果的基础上决定的，称为唯象相互作用。下面我们通过几个比较典型的、并已被实验相当可靠地确立了的相互作用的例子来说明粒子物理中三类相互作用(电磁、强、弱相互作用)。

§9.3　电磁相互作用

荷电粒子与光子的作用是电磁相互作用，按场论观点，就是荷电量子场与量子电磁场相互作用。研究这种微观领域的电磁作用理论称为量子电动力学(*QED*)。

1. 荷电旋量场与电磁场相互作用

以下的讨论适用于正负电子、正负μ介子和质子等一类荷电费米子与光子的相互作用。

我们已经有了比较成熟的古典电磁相互作用理论，而量子电磁相互作用理论应具有古典理论的极限，故可以利用古典理论与量子理论之间的对应关系来建立量子电磁理论。

在古典理论中，一个自由粒子的哈密顿量是

$$H=\sqrt{m^2+\mathbf{P}^2}\qquad(9.3-1)$$

一个荷电为e的粒子在给定的电磁场中运动的哈密顿量是

$$H = e\varphi + \sqrt{m^2 + (\mathbf{P}^2 - e\mathbf{A})^2} \qquad (9.3-2)$$

假使将(9.3—1)中的 H 和 $\mathbf{P}$ 作如下变换

$$H \to H - e\varphi \qquad \mathbf{P} \to \mathbf{P} - e\mathbf{A} \qquad (9.3-3)$$

就得到(9.3—2)。

可将上式的变换合写为(注意 $\varphi = -iA_4 \quad P_4 = iH$)

$$P_\mu \to P_\mu - eA_\mu \qquad (9.3-4)$$

利用上面变换就能从自由粒子的哈密顿求得在电磁场中运动粒子的哈密顿。

在量子理论中,变换(9.3—4)中各量应看成算符,当它们作用于坐标波函数 $\psi(x)$ 时,算符 P_μ 相应于 $-i\partial_\mu$,作用于 $\psi^*(x)$ 时,相应于 $i\partial_\mu$。因此,在量子理论中可将(9.3—4)的变换改写成

$$\left.\begin{aligned} \partial_\mu\psi(x) &\to (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi(x) \\ \partial_\mu\psi^*(x) &\to (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^*(x) \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-5)$$

这里 $\psi(x)$、$\psi^*(x)$是描述荷电粒子的场算符函数。

(1)拉氏密度

自由旋量场的拉氏密度,在第六章已经给出

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi$$

考虑到量子旋量场的电荷共轭不变性和场算符的反对易性要求,我们需要构造一个粒子反粒子对称的旋量场拉氏密度,即

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_\psi &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}^c(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi^c \\ &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\psi^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - m)\bar{\psi}^T \end{aligned} \qquad (9.3-6)$$

上式中 ψ^c 是电荷共轭场函数,最后一步利用了第二章§2.7第4点的变换公式

$$\psi^c = c\bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi}^c = -\psi^T c^{-1}, \quad \gamma_\mu^T = c^{-1}\gamma_\mu c \qquad (9.3-7)$$

荷电旋量场与电磁场相互作用系统的总的 Lagrange 密度函数应是将上式做(9.3—5)变换后的 $\mathscr{L}_{\psi A}$以及自由电磁场的 $\mathscr{L}_A$ 之和,即

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\psi A} + \mathscr{L}_A$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi \\
&\quad - \frac{1}{2}\psi^T[\gamma_\mu^T(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\bar{\psi}^T - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)^2 \\
&= \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_i
\end{aligned}
\tag{9.3-8}
$$

其中 $\mathscr{L}_\psi$ 是由(9.3—6)给出的自由旋量场拉氏密度，$\mathscr{L}_A$ 是自由电磁场拉氏密度，而系统的相互作用拉氏密度函数

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathscr{L}_i &= J_\mu A_\mu \\
J_\mu &= \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T)
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.3-9}
$$

可见 $\mathscr{L}_i$ 是相对论不变量，保证系统的能、动量和角动量守恒。

(2)运动方程

象导出自由场方程一样，将相互作用系统的总 Lagrange 密度函数代入拉氏运动方程

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu U)}\right) = 0
$$

即可得到存在相互作用时场的运动方程。将 $\mathscr{L}$ 代入上式，分别令 $U=\bar{\psi},\bar{\psi}^c,A_\mu$ 便可分别得到

$$
\left.
\begin{aligned}
(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi &= ie\gamma_\mu A_\mu\psi \\
(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi^c &= -ie\gamma_\mu A_\mu\psi^c
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.3-10}
$$

$$
\partial_\mu^2 A_\nu = -J_\nu = \frac{-ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \psi^T\gamma_\nu^T\bar{\psi}^T)
\tag{9.3-11}
$$

(9.3—10)描述了电磁场对 Fermion 的作用，而(9.3—11)却描述了 Fermion 对电磁场的作用。

对应于拉氏密度(9.3—8)，场的哈密顿密度

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} &= \sum_{a=1}^{N}(\pi_a\dot{\psi}_a - \mathscr{L}_a) \\
&= \mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_i
\end{aligned}
\tag{9.3-12}
$$

注意到

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2}\psi^+, \quad \pi_{\psi T} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}^T} = \frac{i}{2}\psi^T\gamma_4^T \quad (9.3-13)$$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\psi &= \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_{\psi T}\dot{\bar{\psi}}^T - \mathscr{L}_\psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma \cdot \nabla + m)\psi + \frac{1}{2}\psi^T(\gamma^T \cdot \nabla - m)\bar{\psi}^T \end{aligned} \quad (9.3-14)$$

与自由电磁场一样

$$\mathscr{H}_A = \frac{1}{2}(\pi_\mu \pi_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu) \quad (9.3-15)$$

因 $\mathscr{L}_i$ 不含场的导数项，相应的共轭动量为零，所以

$$\mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i = -J_\mu A_\mu \quad (9.3-16)$$

上面 $\mathscr{H}_\psi$、$\mathscr{H}_A$ 和 $\mathscr{H}_i$ 分别是量子旋量场、自由电磁场和相互作用的哈密顿密度。系统的总哈密顿

$$H = \int \mathscr{H} d^3x = H_\psi + H_A + H_i \quad (9.3-17)$$

(3)对易关系（量子化规则）

为了将相互作用情况下的场进行量子化，必须引入 ψ 和 A_μ 的对易关系。由于 $\mathscr{L}_i$ 不含场量对时间的导数，因而正则共轭动量算符 π 与 $\mathscr{L}_i$ 的出现无关，所以在相互作用情况下的对易关系（同一时间的对易关系）的形式完全和自由场时情况一样，即：

$$\left.\begin{aligned} [\psi_\rho(x,t), \psi_\sigma^*(x',t)]_+ &= \delta_{\rho\sigma}\delta(x-x') \\ [A_\mu(x,t), \pi_\nu(x',t)] &= i\delta_{\mu\nu}\delta(x-x') \end{aligned}\right\} \quad (9.3-18)$$

其中
$$\pi_\nu \doteq \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial t}$$

并且 ψ、ψ^* 之间其余各对可相互反对易；A_μ、π_μ 之间的其余各对可相互对易；ψ、ψ^* 与 A_μ、π_μ 可相互对易。

象以上一样，由于理论的相对论不变性，我们可以从同一时间的对易关系推广出任意类空距离的两个场量之间的对易关系$[(x-x')^2>0]$：

$$\left.\begin{aligned}[\psi(x),\bar{\psi}(x')]_{+}&=-i\delta(x-x')\\ [A_{\mu}(x),\pi_{\nu}(x')]&=i\delta_{\mu\nu}D(x-x')\end{aligned}\right\}\qquad(9.3-19)$$

应该注意，以上的讨论是在海森堡图象中给出的。虽然对易关系形式上和自由场情况一样，但其中各个场算符却和自由场时不同，它们分别满足非齐次的耦合方程(9.3—10)和(9.3—11)，这些方程比自由场方程复杂得多。由于我们未能求出这些方程的解的封闭形式，即不知道它们的全部时间的解，所以我们不能写出对全部时间都适用的对易关系。一般地说，任意不同时间的对易关系是场算符的复杂表式(和自由场不同，但仍是一个数值)。在物理意义上，对易关系给出测量一个时空点(x)的场量对于另一时空点(x')的场量所产生的影响，即在(x)点场的扰动可以传播至(x')点，使另一场产生新的粒子，而这种效应就是用算符来描写的。为了求得任何时间都适用的协变对易关系，我们在下一章引进相互作用图象。在那里，场方程、对易关系都具有和海森堡图象中的自由场方程和对易关系的形式。

2. 荷电标量场与电磁场相互作用

仿照前面的方法，我们可以建立荷电介子(如 $\pi^{\pm}$，$K^{\pm}$等)和光子的相互作用理论。

将自由荷电介子场的拉氏密度进行(9.3—5)的变换，加上自由电磁场的拉氏密度，则得荷电介子场与电磁场相互作用的总拉氏密度：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\{(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})\varphi^{*}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu})\varphi+m^{2}\varphi^{*}\varphi\}\\&-\frac{1}{2}\partial_{\nu}A_{\nu}\partial_{\mu}A_{\nu}\end{aligned}\qquad(9.3-20)$$

用上式和拉氏运动方程可得荷电介子场和电磁场相互作用时的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}&(\partial_{\mu}-ieA_{\mu})(\partial_{\mu}-ieA_{\mu})\varphi-m^{2}\varphi=0\\&(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})\varphi^{*}-m^{2}\varphi^{*}=0\\&\Box A_{\mu}=-J_{\mu}\end{aligned}\right\}\quad(9.3-21)$$

其中：

$$J_\mu = - ie\{\varphi^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*\varphi\} \tag{9.3-22}$$

代表荷电介子场的电流密度。

将总拉氏密度(9.3—20)改写成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_i \tag{9.3-23}$$

其中 $\mathscr{L}_\varphi$、$\mathscr{L}_A$、$\mathscr{L}_i$ 分别是自由介子场、自由电磁场和它们的相互作用的拉氏密度。可以写出：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_i &= ie\{\partial_\mu\varphi^* A_\mu\varphi - A_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + ieA_\mu^2\varphi^*\varphi\} \\ &= J_\mu A_\mu + e^2A_\mu^2\varphi^*\varphi\end{aligned} \tag{9.3-24}$$

这里 $\mathscr{L}_i$ 不是简单地等于 $J_\mu A_\mu$，并且与标量场的微商有关，因此 $\mathscr{H}_i \neq -\mathscr{L}_i$（于是 $\mathscr{H}_i$ 不是一个不变量）。

可以求得两种场的正则共轭动量

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* - eA_4\varphi^* \\ \pi^* &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} + eA_4\varphi \\ \pi_\mu &= \dot{A}_\mu\end{aligned} \tag{9.3-25}$$

由此推出哈密顿密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* + \pi_\mu\dot{A}_\mu - \mathscr{L} \\ &= \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* + \pi_\mu A_\mu - \{-\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)^2 + J_\mu A_\mu + e^2A_\mu^2\varphi^*\varphi\}\end{aligned} \tag{9.3-26}$$

以 $\dot{\varphi} = \pi^* - eA_4\varphi$，$\dot{\varphi}^* = \pi + eA_4\varphi^*$ 代入上式得

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\varphi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_i \tag{9.3-27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}_\varphi &= \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi + \pi^*\pi + m^2\varphi^*\varphi \\ \mathscr{H}_A &= \frac{1}{2}[(\partial_i A_\mu)^2 + \pi_\mu^2] \\ \mathscr{H}_i &= - J_\mu A_\mu - e^2(A_\mu^2 - A_4^2)\varphi^*\varphi \\ &= - \mathscr{L}_i - e^2\varphi^*\varphi A_4^2\end{aligned}\right\} \tag{9.3-28}$$

$\mathscr{H}_\psi$、$\mathscr{H}_A$、$\mathscr{H}_i$分别为自由电子场、自由电磁场和电子场与电磁场相互作用的哈密顿密度。同时看出，$\mathscr{H}_i \neq -\mathscr{L}_i$。

3. 标量场与电磁场相互作用的一般描述

上面，我们讨论了荷电介子场（$\pi^\pm$介子场）和电磁场的相互作用。在第五章中，我们把中性 π^0 介子的 Lagrange 密度和荷电 $\pi^\pm$介子的 Lagrange 密度合在一起，得到三种 π 介子的统一描述，并引进同位旋，把同位旋第三分量守恒与电荷守恒联系起来（两者只差一个电荷因子"e"）。为了统一描述三种 π 介子与电磁场的相互作用，注意到中性 π^0 介子不带电荷，它与电磁场没有直接相互作用，我们只需在上面结果的基础上加上自由 π^0 介子的 Lagrange 密度即可。于是总的 Lagrange 密度函数写成

$$\mathscr{L} = -\ \{(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi + m^2\varphi^*\varphi\}$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3 + m^2\varphi_3^2 \qquad (9.3-29)$$

引进 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$，$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ (9.3 − 30)

代入前式得

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\{(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi_1(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi_1$$

$$+ (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi_2(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi_2 + \partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3$$

$$+ m^2(\varphi_1\varphi_1 + \varphi_2\varphi_2 + \varphi_3\varphi_3) + \partial_\mu A_\nu\partial_\mu A_\nu\} \quad (9.3-31)$$

与第五章§5.3一样，引进3×3矩阵 t_3，代表 π 介子同位旋第三分量和定义 π 介子的同位旋空间 $\boldsymbol{\varphi}$

$$t_3 = \begin{vmatrix} o & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} \qquad (9.3-32)$$

则(9.3−31)可写成简洁的形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\{(\partial_\mu - ieA_\mu t_3)\boldsymbol{\varphi}\cdot(\partial_\mu - ieA_\mu t_3)\boldsymbol{\varphi}$$

$$+ m^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} + (\partial_\mu A_\nu)^2\} \qquad (9.3-33)$$

可见，只要将第五章§5.3中三种自由 π 介子的 Lagrange 函数密

度(5.3－1)作如下代换

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu t_3 \qquad (9.3-34)$$

并加上自由电磁场的 Lagrange 函数,便可得到三种 π 介子与电磁场相互作用的总的 Lagrange 函数。

系统的 Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}$(9.3-33)式对同位旋空间绕第三轴转动具有不变性,但对绕其它轴转动不再具有不变性。所以存在电磁相互作用情况下,除了同位旋第三分量守恒外,其它分量不再守恒。对于 π 介子,同位旋第三分量守恒,相当于电磁相互作用系统的电荷守恒。

4.规范不变性与电荷守恒

在自由电磁场理论中,我们已经看到,电磁场方程对第二规范变换

$$\left.\begin{aligned} &A_\mu \longrightarrow A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x) \\ &\text{及} \quad \Box \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-35)$$

保持不变。这个规范不变性,是由于光子的静止质量为零(或反过来说,这个规范不变性保证了光子的静止质量为零)。但光子的静止质量不仅在自由场情况下为零,而且在与其它场发生相互作用情况下仍然保持为零。因此要求在相互作用情况下,电磁场对(9.3－35)的变换不变。但是,在相互作用情况下,系统的拉氏密度对单纯的(9.3－35)变换保持不变是有困难的。

另一方面,电荷守恒定律是一条普遍的定律,在自由场情况下,电荷守恒与在场的位相变换下 $\mathscr{L}$ 不变密切相连。可是在相互作用情况下,每一种粒子(或场)的电荷并不分别守恒,只能是整个体系的电荷保持不变,因而相互作用的场的 $\mathscr{L}$ 并不是在任一种场的位相变换下保持不变。我们引进如下的定域位相变换

$$\left.\begin{aligned} \varphi \to \varphi' &= e^{ie\varepsilon(x)}\varphi \\ \varphi^* \to \varphi^{*\prime} &= e^{-ie\varepsilon(x)}\varphi^* \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-36)$$

结合(9.3－35)和(9.3－36)的变换称为(推广的)规范变换,这时

$$(\partial_\mu - ieA_\mu')\varphi' = \{\partial_\mu - ie[A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)]\} e^{ie\varepsilon(x)}\varphi$$

$$=e^{ie\varepsilon(x)}[\partial_\mu + ie\partial_\mu\varepsilon(x) - ieA_\mu - ie\partial_\mu\varepsilon(x)]\varphi$$

$$=e^{ie\varepsilon(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \qquad (9.3-37)$$

同理有

$$(\partial_\mu + ieA_\mu')\varphi'^* = e^{-ie\varepsilon(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^* \qquad (9.3-38)$$

这说明$(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$在推广的规范变换下保持不变，而且如同经过一个与时空有关的位相变换一样。因此拉氏密度在这种规范变换下的不变性就相当于电荷守恒。

§9.4 强相互作用

介子($\pi\ K\ \rho\ \omega,\cdots$)和重子($p\ n\ \Lambda\ \sum\ \Xi\cdots$)等强子之间的相互作用是强相互作用。强相互作用至今基本上是唯象的，它们是按实验总结的一些守恒定律来确定。研究得最早，积累得最多结果的强相互作用是π介子与核子的相互作用，在实验上最先发现在原子核中核子之间的核力是强相互作用。进一步的研究认为：核子之间的相互作用不是直接的，它是通过π介子作媒介而产生的，即是说π介子与核子之间的作用才是直接的强相互作用。六十年代以来，大量研究表明：强子仍然存有结构，人们认为强子是由下一层次的夸克所组成，而且建立了一套处理夸克之间强相互作的量子色动力学(QCD)理论。这个理论认为，夸克之间是通过交换色胶子而相互作用，胶子场是非对易的$SU_C(3)$群规范场。胶子和夸克之间的相互作用形式，可以根据规范不变原理完全确定下来。进一步的研究发现，QCD理论中规范相互作用具有渐近自由的性质，即相互作用常数g与动量转移有关。当动量转移增大，也即相互距离趋近时，其相互作用常数减小；反之，当动量转移减少，相互距离增大时，相互作用常数增大。因此，尽管相互作用形式已知，目前在实际计算中，对高动量转移的近距离区域，可用微扰理论方法，而对低动量转移的远距离区域，尚未有完善的方法。对高动量转移的深度非弹性散射过程，利用微扰QCD理论进行计算，其结果与目前的实验数据是相容的。人们有信心发展这一理论，而对非微扰

QCD 理论也在探索之中。

由夸克组成的强子与强子之间的相互作用，例如 π 和 N 之间的相互作用，情况更加复杂。人们相信，其本质很可能和组成强子的夸克之间的相互作用有同一来源，但尚未建立满意的联系。所以 π—N 相互作用的研究仍处于唯象阶段，只能唯象地引进相互作用拉氏量 $\mathscr{L}_i$。

按照 Yakawa 理论，核子之间的相互作用是通过核子交换 π 介子来实现，因而核子之间相互作用的电荷无关性也就是来自 π 介子和核子之间相互作用在同位旋空间转动下的不变性。因此，π—N 相互作用的 $\mathscr{L}_i$ 应该是同位旋标量，当然 $\mathscr{L}_i$ 是 Lorentz 标量。另外，由于核子数守恒，$\mathscr{L}_i$ 中 ψ 和 $\bar{\psi}$ 应成对出现。Kemmer 根据以上考虑提出 π—N 相互作用应该是 Yakawa 型直接相互作用。根据大量的实验事实，知道 π 介子的自旋为零，宇称为负，故应用赝标量场 φ 来描述；核子的自旋为1/2，应该用旋量场来描述。作为强作用例子，我们讨论 π—N 相互作用。

1. π^0N 相互作用

π^0、N 相互作用，就是 π^0 介子场 φ_0 与核子场 ψ 的相互作用。由于 π^0 不带电荷，所以 π^0N 作用可以同前面的电磁场（不带电荷）与旋量场的相互作用类比。考虑到相对论不变和宇称守恒的要求，我们应构造一个相互作用拉氏密度是 Lorentz 标量，且满足在空间反射变换下不变的要求。因此，我们对核子场采用赝标协变量 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$，同时采用 Yakawa 耦合方法。类比于旋量场与电磁场作用，只需作替换：

$$A_\mu \to \varphi_0, \qquad \gamma_\mu \to \gamma_5, \qquad e \to g$$

立即可得到 π^0N 相互作用 Lagrange 密度

$$\mathscr{L}_i = \frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T)\varphi_0 \qquad (9.4-1)$$

其中耦合常数 $\frac{g^2}{4\pi} = 1 \sim 15$，是强作用耦合常数，比电磁作用耦合常数 $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 大得多。

在空间反射变换下

$$x \to -x', \quad t = t'$$

$$\psi'(x') = p\psi(x) = \gamma_4\psi(x), \qquad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4\gamma_5\gamma_4\psi(x) = -\bar{\psi}(x)\gamma_5(x)$$

$$(9.4-2)$$

中性 π^0 介子场 $\varphi_0(x)$ 是赝标量场，在空间反射变换下应做如下变换

$$\varphi_0(x) \to \varphi'_0(x') = -\varphi_0(x) \qquad (9.4-3)$$

将上两式代入(9.4—1)式立即可得

$$\mathscr{L}_i'(x') = \mathscr{L}_i(x)$$

可见 $\mathscr{L}i(x)$ 是宇称守恒的，这是强相互作用的共同特征。

仿照上一节中旋量场与电磁场作用的处理方法，可写出核子的 Lagrange 密度

$$\mathscr{L}_\psi = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi - \frac{1}{2}\psi^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M)\bar{\psi}^T$$

$$(9.4-4)$$

π^0 介子的 Lagrange

$$\mathscr{L}_{\pi^0} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_0\partial_\mu\varphi_0 + m^2\varphi_0^2) \qquad (9.4-5)$$

于是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_{\pi^0} + \mathscr{L}_i \qquad (9.4-6)$$

将 $\mathscr{L}$ 代入 Lagrange 方程，可得相互作用情况下的场方程

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi = ig\gamma_5\psi\varphi_0 \\ &(\gamma_\mu\partial_\mu - M)\bar{\psi}^T = -ig\gamma_5\bar{\psi}^T\varphi_0 \\ &(\partial_\mu^2 - m^2)\varphi_0 = -\frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T) \end{aligned}\right\} \qquad (9.4-7)$$

当然 $\mathscr{L}_i$ 的选择不是唯一的，我们也可以选择导数耦合型，即赝矢—赝矢相互作用

$$\mathscr{L}_i = i\frac{f}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T)\partial_\mu\varphi_0 \qquad (9.4-8)$$

2. $\pi^\pm N$ 相互作用

荷电的 $\pi^{\pm}$ 介子，自旋为零，宇称为负，用复赝标量场 φ 来描写。核子包含质子和中子，分别用旋量场 p 和 n 表示，并合写成二分量旋量形式

$$N(x) = \begin{vmatrix} p(x) \\ n(x) \end{vmatrix} \qquad (9.4-9)$$

$N(x)$ 是 8×1 矩阵。令质子和中子的质量 $M_p \cong M_n = M$，则自由旋量场 Dirac 方程写成

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_\mu\partial_\mu + M)N(x) &= 0 \\ \overline{N}(x)(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - M) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.4-10)$$

其中 γ_μ 是 8×8 矩阵，是

$$\gamma_\mu \times I = \begin{vmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{vmatrix} \qquad (9.4-11)$$

的简写。

$\pi^{\pm}N$ 互作用系统的 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\pi + \mathscr{L}_i \qquad (9.4-12)$$

其中核子的拉氏密度

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_N &= -\frac{1}{2}\overline{N}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)N - \frac{1}{2}N^T(\gamma_\mu\partial_\mu - M)\overline{N}^T \\ &= -\frac{1}{2}\bar{p}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)p - \frac{1}{2}\bar{n}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)n \\ &\quad - \frac{1}{2}p^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M)\bar{p}^T - \frac{1}{2}n^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M)\bar{n}^T(x) \end{aligned} \qquad (9.4-13)$$

$\pi^{\pm}$ 介子复赝标量场的拉氏密度

$$\mathscr{L}_{\pi^\pm} = -(\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + m^2\varphi^*\varphi) \qquad (9.4-14)$$

用赝标耦合，系统的相互作用哈密顿

$$\mathscr{L}_i = \frac{ig}{2}(\bar{p}\gamma_5 n - n^T\gamma_5^T\bar{p}^T)\varphi \qquad (9.4-15)$$

将 $\mathscr{L}$ 代入拉氏运动方程，可得到 $\pi^{\pm}$、N 相互作用情况下的场方程。由于 $\mathscr{L}_i$ 不含导数项，所以

$$\mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i \qquad (9.4-16)$$

旋量场算符 $p(x)$，$n(x)$ 是彼此等时反对易的，而 $\varphi(x)$，$\varphi^*(x)$ 和 $p(x)$、$n(x)$是等时对易的。

3. πN 相互作用

这里，我们综合 $\pi^0 N$ 和 $\pi^{\pm} N$ 相互作用的结果，构造一个将三种 π 介子与核子相互作用都包含进去的理论。

令中性 π^0 介子的场 $\varphi_0 \equiv \varphi_3$，则可将(9.4—5)改写成

$$\mathscr{L}_{\pi^0} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3 + m^2\varphi_3^2) \qquad (9.4-17)$$

对荷电 $\pi^{\pm}$ 介子场作变换(φ_1，φ_2为实数场)

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \qquad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

则(9.4—14)变成

$$\mathscr{L}_{\pi^{\pm}} = -\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 + m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] \qquad (9.4-18)$$

联合上面两式，可得到三种介子的自由场拉氏密度

$$\mathscr{L}_\pi = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + m^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}) \qquad (9.4-18)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$是同位旋空间三分量矢量，$\mathscr{L}_\pi$ 是同位旋标量和 Lorentz 标量(相对论不变量)。

关于 πN 之间的强相互作用拉氏密度，出于一般考虑，可写成如下的赝标耦合形式：

$$\mathscr{L}_i = ig_c(\bar{p}\gamma_5 n\varphi + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^*) + ig_\pi\bar{p}\gamma_5 p\varphi_3 + ig_\pi\bar{n}\gamma_5 n\varphi_3 \qquad (9.4-19)$$

为简洁起见，我们将上式改写成同位旋空间二分量旋量 $N = \begin{vmatrix} p \\ n \end{vmatrix}$ 乘积的形式。为此，引进矩阵

$$\tau_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \sqrt{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tau_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) = \sqrt{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

则有

$$\bar{p}\gamma_5 n = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{N}\gamma_5\tau_+ N, \qquad \bar{n}\gamma_5 p = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{N}\gamma_5\tau_- N$$

$$\bar{p}\gamma_5 p = \frac{1}{2}\overline{N}\gamma_5(1+\tau_3)N, \qquad \bar{n}\gamma_5 n = \frac{1}{2}\overline{N}\gamma_5(1-\tau_3)N$$

再令

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \qquad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

将上述各式代入(9.4—19),可得

$$\mathscr{L}_i = \frac{ig_c}{\sqrt{2}}(\overline{N}\gamma_5\tau_1 N\varphi_1 + \overline{N}\gamma_5\tau_2 N\varphi_2)$$

$$+ \frac{i}{2}(g_p + g_n)\overline{N}\gamma_5 N\varphi_3 + \frac{i}{2}(g_p - g_n)\overline{N}\gamma_5\tau_3 N\varphi_3$$

为使上式满足同位旋空间转动不变性要求(同位旋守恒),不含同位旋的第二项应等于零。这要求其系数为零,即

$$g_p = -g_n = \frac{g_c}{\sqrt{2}} = g$$

于是

$$\mathscr{L}_i = ig\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}N \tag{9.4-20}$$

如果取核子场的 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L}_N = -\overline{N}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)N \tag{9.4-21}$$

则 πN 相互作用系统同位旋守恒的 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\pi + \mathscr{L}_i$$

将 $\mathscr{L}$ 代入 Lagrange 方程,可得各种场的运动方程如下:

$$\left.\begin{aligned} &\text{核子场:} \quad &(\gamma_\mu\partial_\mu + M)N = ig\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}N \\ & &N(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - M) = -ig\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi} \\ &\pi\text{ 介子场:} \quad &(\partial_\mu^2 - m^2)\boldsymbol{\varphi} = -ig\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N \end{aligned}\right\} \tag{9.4-22}$$

引进共轭动量

$$\pi_N = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{N}} = iN^+ \qquad \Pi_\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{9.4-23}$$

则 π 介子场的 Hamiltonian 为

$$\mathscr{H}_\pi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi} + \nabla\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla\boldsymbol{\varphi} + m^2\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi})$$

(9.4－24)

核子场的 Hamiltonian 为

$$\mathscr{H}_N = \overline{N}(\gamma \cdot \nabla + M)N \tag{9.4－25}$$

相互作用的 Hamiltonian 为

$$\mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i = -ig\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi}N \tag{9.4－26}$$

考虑到核子、反核子对称的要求，可将(9.4—25)和(9.4—26)改写成

$$\mathscr{H}_N = \frac{1}{2}\overline{N}(\gamma \cdot \nabla + M)N + \frac{1}{2}N^T(\gamma^T \cdot \nabla - M)\overline{N}^T$$

(9.4－27)$_1$

$$\mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i = \frac{-ig}{2}[\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi}N - N^T\gamma_5^T\boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}\overline{N}^T]$$

(9.4－27)$_2$

同时间对易关系为($t=t'$)

$$\left.\begin{array}{l}[p(x),p^+(x')]_+ = [n(x),n^+(x')]_+ = \delta(x-x') \\ [\varphi_i(x),\Pi_j(x')] = i\delta_{ij}\delta(x-x') \\ [p(x),n(x')]_+ = [p(x),n^+(x')]_+ = \cdots\cdots = 0 \\ p(x)、n(x)、p^+(x)、n^+(x) \text{ 与 } \boldsymbol{\varphi}(x)、\boldsymbol{\Pi}(x) \text{ 对易}\end{array}\right\}$$

(9.4－28)

以上的讨论中，我们忽略了质子和中子的质量差 以及电磁相互作用。因此除了通常的能量、动量、角动量、字称守恒外，还满足同位旋守恒以及核子数守恒。

强相互作用哈密顿密度 $\mathscr{H}_i$ 的物理意义可做如下解释：由于

$$\mathscr{H}_i \sim \overline{N}\varphi N \sim \overline{N}^{(+)}\varphi^{(+)}N^{(-)} + \overline{N}^{(+)}\varphi^{(-)}N^{(-)} + \cdots\cdots$$

其中第一项代表核子吸收一个介子变成另一个核子；第二项代表核子放出一个介子变成另一个核子；其余类推。

§9.5 弱相互作用

1. 弱相互作用的描述

弱相互作用广泛地存在于衰变过程和俘获过程之中，如原子核的 β 衰变 $n\rightarrow pe^-\bar{\nu}$；$\mu$ 轻子衰变 $\mu^-\rightarrow e^-\nu\bar{\nu}$；$\mu^-$ 俘获 $\mu^- p\rightarrow n\nu$；又如 $\pi\longrightarrow e\nu,\mu\nu$；$k\rightarrow\pi e\nu,\pi\mu\nu$ 等等。尽管弱相互作用理论还不是一个成熟的理论，但它取得的成就比强相互作用多。在弱相互作用中最早发现的是 β 衰变。

大量的实验和理论分析，显示了弱相互作用是四费米子耦合型，而且轻子数和重子数分别守恒。现以 β 衰变

$$n\rightarrow p+e^-+\bar{\nu} \qquad (9.5-1)$$

为例进行讨论。

以 p,n,e,ν 分别代表质子、中子、电子和中微子，相应场量 ψ_p，ψ_n,ψ_e,ψ_ν。

以 $\Omega_i(i=S,P,V,A,T)$ 表示旋量场的16个独立的4×4厄米矩阵，即

$$\left.\begin{array}{lll}\Omega_S=I & \Omega_V=\gamma_\mu & \Omega_T=\sigma_{\mu\nu}\\ \Omega_P=\gamma_5 & \Omega_A=i\gamma_5\gamma_\mu & \end{array}\right\} \qquad (9.5-2)$$

下标 S,V,T,P,A 分别表示标量、矢量、张量、赝标量、赝矢量。

费米(1934)首先提出 β 衰变的理论。为了描述(9.5－1)所表示的 β 衰变，可在拉氏密度中引进如下的相互作用项

$$C_s(\bar{p}n)(\bar{e}\nu)+C_s^*(\bar{n}p)(\bar{\nu}e) \qquad (9.5-3)$$

上式是一厄米算符，有罗仑兹不变性，满足动量守恒能量守恒、电荷守恒和宇称守恒等要求。但满足这些要求的远不止上式，像如下各项

$$\left.\begin{array}{l}[C_V(\bar{p}\Omega_V n)(\bar{e}\Omega_V\nu)+h.c.]\\ [C_T(\bar{p}\Omega_T n)(\bar{e}\Omega_T\nu)+h.c.]\\ [C_A(\bar{p}\Omega_A n)(\bar{e}\Omega_A\nu)+h.c.]\\ [C_P(\bar{p}\Omega_P n)(\bar{e}\Omega_P\nu)+h.c.]\end{array}\right\} \qquad (9.5-4)$$

其中 $h.c.$ 表示相应的厄米共轭项。

因此，人们在相当长的时期内曾企图用上式的线性叠加

$$\sum_i C_i(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i \nu) + h.c.$$

来描述衰变现象，并尝试寻找一组相互作用常数 $C_i(i = S,P,V,A,$ T)使理论与实验符合。

2. 含赝标量弱作用理论

李政道和杨振宁(1956)发现宇称在弱相互作用中不守恒之后，对弱作用理论的发展起了很大影响。由于宇称不守恒，拉氏密度就不一定在空间反射时具有不变性，这样在弱作用的拉氏密度中不仅包含标量，也可包含赝标量，于是 β 衰变的相互作用拉氏密度具有如下形式

$$\mathscr{L}_i = \sum_i [C_i(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i \nu) + C_i'(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i \gamma_5 \nu)] + h.c. \qquad (9.5-5)$$

第二个取和项是赝标量项，相应于宇称不守恒部分。其中各因子如 $\bar{p}\Omega_i n$，$\bar{e}\Omega_i \gamma_5 \nu$ 等称为弱流或流，这里只含有荷电流，即每个流的作用都改变粒子的电荷。式中十个耦合常数 C_i、C_i' 只能由实验决定。

为了写出上式中的厄米共轭项 $h.c.$，需借助下列关系

$$\Omega_i^+ = \Omega_i, \quad \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu, \quad \gamma_5^+ = \gamma_5, \quad (\bar{p})^+ = (p^+\gamma_4)^+ = \gamma_4 p \text{ 等},$$

同时注意到 $(\bar{n}\Omega_i p)$，$(\bar{\nu}\Omega_i e)$ 等是双费米算符，是1×1矩阵，互相可以交换前后次序，于是，(9.5－5)括号内第一项的厄米共轭为

$$\begin{aligned}
[C_i(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i \nu)]^+ &= C_i^*(\bar{e}\Omega_i \nu)^+ (\bar{p}\Omega_i n)^+ \\
&= C_i^*(\nu^+ \Omega_i^+ \gamma_4 e)(n^+ \Omega_i^+ \gamma_4 p) \\
&= C_i^*(\bar{n}\Omega_i p)(\bar{\nu}\Omega_i e)
\end{aligned}$$

同理，括号内第二项的厄米共轭为

$$\begin{aligned}
&[C_i'(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i \gamma_5 \nu)]^+ \\
&= C'^*_i(\bar{e}\Omega_i \gamma_5 \nu)^+ (\bar{p}\Omega_i n)^+ \\
&= C'^*_i(\nu^+ \gamma_5^+ \Omega_i^+ \gamma_4 e)(n^+ \Omega_i^+ \gamma_4 p) \\
&= -C'^*_i(\bar{\nu}\gamma_5 \gamma_4 \Omega_i \gamma_4 e)(\bar{n}\gamma_4 \Omega_i \gamma_4 p) \\
&= -C'^*_i(\bar{n}\Omega_i p)(\bar{\nu}\gamma_5 \Omega_i e)
\end{aligned}$$

利用上面两式结果代入(9.5—5)式,可得显示式

$$\mathscr{L}_i = \sum_i \{(\bar{p}\Omega_i n)[\bar{e}\Omega_i(C_i + C_i' \gamma_5)\nu] + (\bar{n}\Omega_i p)[\bar{\nu}(C_i^* - C'^*_i \gamma_5)\Omega_i e]\} \tag{9.5-6}$$

3. V—A 型耦合弱相互作用理论

由总结大量的实验结果得到

$$C_S \approx C_S' \approx C_P \approx C_P' \approx C_T \approx C_T' \approx 0$$

$$C_V \approx C_V' \approx -C_A \approx -C_A' \left(= \frac{G}{\sqrt{2}}\right)$$

这表示只存在 V、A 两种耦合。

最简单的弱作用过程是 μ 衰变:

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

这是一个纯轻子过程,不受强作用影响,V—A 耦合是相当精确的。于是我们改写(9.5—6)式,$\bar{p}$、$n \to \bar{\mu}$、ν_μ 用 $\Omega_V = \gamma_\mu$,$\Omega_A = i\gamma_5\gamma_\mu$,则有

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_i(\mu,e) &= (\bar{\mu}\gamma_\lambda\nu_\mu)[\bar{e}\gamma_\lambda(C_V + C_V' \gamma_5)\nu_e] \\
&\quad + (\bar{\nu}_\mu\gamma_\lambda\mu)[\bar{\nu}_e(C_V^* - C'^*_V \gamma_5)e] \\
&\quad + (\bar{\mu}i\gamma_5\gamma_\lambda\nu_\mu)[\bar{e}i\gamma_5\gamma_\lambda(C_A + C_A' \gamma_5)\nu_e] \\
&\quad + (\bar{\nu}_\mu i\gamma_5\gamma_\lambda\mu)[\bar{\nu}_e(C_A^* - C'^*_A \gamma_5)i\gamma_5\gamma_\lambda e] \\
&= \frac{G}{\sqrt{2}}\{(\bar{\mu}\gamma_\lambda\nu_\mu)[\bar{e}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_e] \\
&\quad + (\bar{\mu}\gamma_5\gamma_\lambda\nu_\mu)[\bar{e}\gamma_5\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_e]\} \\
&\quad + \frac{G}{\sqrt{2}}\{(\bar{\nu}_\mu\gamma_\lambda\mu)[\bar{\nu}_e(1 - \gamma_5)\gamma_\lambda e] \\
&\quad + (\bar{\nu}_\mu\gamma_5\gamma_\lambda\mu)[\bar{\nu}_e(1 - \gamma_5)\gamma_5\gamma_\lambda e]\} \\
&= \frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{\mu}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_\mu][\bar{e}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_e] \\
&\quad + [\bar{\nu}_\mu\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\mu][\bar{\nu}_e\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)e]\}
\end{aligned} \tag{9.5-7}$$

对一般的弱作用,必须引进一个修正参数 a,以使得理论与实

验一致。所以 β 衰变的 Lagrange 密度函数应修正成

$$\mathscr{L}_i(n,p)=\frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{p}\gamma_\lambda(1+a\gamma_5)n][\bar{e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_e]$$

$$+[\bar{n}\gamma_\lambda(1+a\gamma_5)p][\bar{\nu}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)e]\}$$

$$(9.5-8)$$

这里 $i\bar{\psi}_1\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_2$ 一般称为 V—A 型弱流或 V—A 流。在上式中我们区别了两种中微子：电子中微子 ν_e 和 μ 中微子 ν_μ。ν_e 总是同 e 而不同 μ 一道起作用；相反，ν_μ 总是同 μ 而不同 e 一道起作用，这是经过实验证明的。

式(9.5—7)和(9.5—8)中只有一个耦合常数 G，而且基本上相等，因此，这种四费米子耦合称为 V—A 型普适弱相互作用。

上述 V—A 型四费米子相互作用理论是盖尔曼和费曼(Gell-mann and Feynman1958)提出的，它得到大量实验的支持，但在有奇异粒子(指 K 介子和超子)参加下，理论未能很好地说明全部实验事实。虽然 Fermi 弱作用理论对于低能弱过程能很好说明，但是，在高能区却遇到严重困难，例如对 $\bar{\nu}_e+e^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$ 散射过程，取一级近似可得到截面

$$\sigma\sim G^2E^2$$

这表示，有效截面 σ 随质心系能量 E 的平方而无限增长，这破坏了过程的幺正性。

另外，由于相互作用常数 G 具有能量的负方幂，这种相互作用是不能重整化的，所以上述理论还不是一个完善的理论。因此，六十年代，人们又重新注意弱作用的中间玻色子理论，认为弱作用和电磁作用相类似，是通过媒介子——中间玻色子来传递的。在规范场论中，中间玻色子场就是规范场，进而发展成为弱电统一理论，我们将在本书最后的第十三章中介绍。

第十章　散射矩阵和协变微扰论

量子场论的一个最重要的课题是对有相互作用的场系统进行求解，具体地说，就是求场系统不同量子态之间的跃迁振幅和跃迁几率。我们知道，量子力学问题的求解，可以在各种表象中进行，选择恰当的表象（犹如力学问题中选用恰当的坐标系），可使求解问题方便得多。实践证明，如果采用相互作用表象，不但求解方便，而且具有明显的协变性。

§10.1　相互作用图象

1. 量子力学中的图象

在量子力学中，一切实验结果都可以用不同的算符 F 在不同的态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 间的矩阵元 $\langle a|F|b\rangle$ 来表述。在量子力学里，描述上述矩阵元的方式，原则上有无穷多种，相应于无穷多种图象，但当我们研究矩阵元随时间 t 的演变时，就得用与时间 t 有关的图象，最常用的与时间 t 有关的图象是 S 图象（薛定格图象）、H 图象（海森堡图象）和 I 图象（相互作用图象）。这三种图象，采用三种不同的方式来描述系统随时间 t 的变化：

a. 系统随时间的变化完全由态随时间的变化来反映，称为 S (Schrö dinger)图象。

b. 系统随时间的变化完全由算符随时间的变化反映，称为 H (Heisenberg)图象。

c. 系统随时间的变化，部分地由态随时间的变化反映，部分地由算符随时间的变化反映，这就是 I(Interaction)图象。

当然，这三种描述方法（图象）应该是等价的，即，它们计算出

的矩阵元$<a|F|b>$应该是相等的。在分别讨论三种图象之后，我们将证明这一点。

(1)S(薛定格)图象

在通常的量子力学里，态矢$|t>$与时间有关，它满足波动方程(Schrödinger 方程)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t>=H(q,p)|t> \qquad (10.1-1)$$

$H(q,p)$是动力系的厄米哈密顿(即能量)算符。

可观察的物理量$F(q,p)$都是厄米算符，且与时间t无关，即$F^+=F$，且

$$\dot{F}(q,p)=0 \qquad (10.1-2)$$

物理量F的期待值是：

$$\overline{F}(t)=<t|F(q,p)|t> \qquad (10.1-3)$$

它与时间t有关。由(10.1—1)，(10.1—2)和(10.1—3)有

$$\begin{aligned}\dot{\overline{F}}(t)&=(<t|\frac{\partial}{\partial t})F(q,p)|t>\\&\quad+<t|\dot{F}(q,p)|t>+<t|F(q,p)\frac{\partial}{\partial t}|t>\\&=i<t|H^+F(q,p)|t>-i<t|F(q,p)H|t>\\&=i<t|[H,F(q,p)]|t>\end{aligned} \qquad (10.1-4)$$

(其中考虑到$H^+=H$)。

综合得到在S图象中态矢和物理量算符满足

$$\left.\begin{aligned}&i\frac{\partial}{\partial t}|>_s=H_s|>_s\\&\dot{F}_s=0\\&\dot{\overline{F}}_s=i\,_s<|[H_s,F_s]|>_s\end{aligned}\right\} \qquad (10.1-5)$$

其中下标S表示S图象中的量。

(2)H(海森堡)图象

态的运动方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}|>_H=0 \qquad (10.1-6)$$

算符的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{F}_H &= i[H_H, F_H] \\ \text{可推证} \quad \dot{\overline{F}}_H &= i \underset{H}{<} |[H_H, F_H]| \underset{H}{>} \end{aligned}\right\} \qquad (10.1-7)$$

其中下标 H 表示 H 图象中的量。

(3)I(相互作用)图象

在相互作用图象中，态和算符都随时间变化，态的运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}|>_I = H_{iI}|>_I \qquad (10.1-8)$$

算符的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{F}_I &= i[H_{0I}, F_I] \\ \text{推得} \quad \dot{\overline{F}}_I &= i \underset{I}{<} |[H_I, F_I]| \underset{I}{>} \end{aligned}\right\} \qquad (10.1-9)$$

其中 $H_I = H_{0I} + H_{iI}$为作用图象中的哈密顿，在(10.1—9)中取 $F_I = H_{0I}$得

$$\dot{H}_{0I} = 0, \qquad \dot{\overline{H}}_{0I} \neq 0$$

取 $F_I = H_I$ 得

$$\dot{\overline{H}}_I = 0$$

表示在作用图象中 H_{0I} 与时间无关，"自由"部分能量不守恒，但总的能量守恒。将 H_I写成 H_{0I}和 H_{iI}之和的分法是任意的，如取 H_{0I}=0，则作用图象就是薛定格图象；如取 $H_{iI}=0$，作用图象就是海森堡图象。

可以证明：由薛定格图象出发通过以下变换

$$|>_H = (e^{iHt}|>)_s = e^{iH_s t}|>_s \qquad (10.1-10)$$

和

$$F_H = (e^{iHt}Fe^{-iHt})_s = e^{iH_s t}F_s e^{-iH_s t} \qquad (10.1-11)$$

可变至海森堡图象。证明如下：

从(10.1—10)式有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|>_H &= e^{iH_s t}(iH_s)|>_s + e^{iH_s t}\frac{\partial}{\partial t}|>_s \\ &= [e^{iH_s t}(iH_s - iH_s)]|>_s = 0 \end{aligned}$$

这就是海森堡图象中的态运动方程(10.1—6)。

从(10.1—11),取 $F = H$ 得 $H_H = H_s$,然后由

$$\dot{F}_H = \frac{\partial}{\partial t}(e^{iH_s t}F_s e^{-iH_s t})$$
$$= i(H_s e^{iH_s t}F e^{-iH_s t} - e^{iH_s t}F e^{-iH_s t}H_s)$$
$$= i[H_s F_H - F_H H_s] = i[H_H, F_H]$$

这就是海森堡图象中算符的运动方程(10.1—7)式。

类似地从薛定格图象出发,通过变换

$$|\ \rangle_I = (e^{iH_0 t}|\ \rangle)_s = e^{iH_{0s}t}|\ \rangle_s \qquad (10.1-12)$$

和
$$F_I = (e^{iH_0 t}F e^{-iH_0 t})_s = e^{iH_{0s}t}F_s e^{-iH_{0s}t} \qquad (10.1-13)$$

可变至作用图象。证明如下:

从(10.1—12)有

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\ \rangle_I = i\frac{\partial}{\partial t}(e^{iH_0 t}|\ \rangle_s)$$
$$= i[iH_0 e^{iH_0 t}|\ \rangle + e^{iH_0 t}\frac{\partial}{\partial t}|\ \rangle]_s$$
$$= [e^{iH_0 t}(H - H_0)|\ \rangle]_s = [e^{iH_0 t}H_i|\ \rangle]_s$$
$$= [e^{iH_0 t}H_i e^{-iH_0 t}e^{iH_0 t}|\ \rangle]_s$$
$$= H_{iI}|\ \rangle_I$$

推导中用了 $H = H_0 + H_i$ 和(10.1—13)式,这就是作用图象中的态运动方程(10.1—8)

从(10.1—13)出发,先令 $F = H_0$ 得 $H_{0I} = H_{0s}$,然后由

$$\dot{F}_I = \frac{\partial}{\partial t}(e^{iH_{0s}t}F_s e^{-iH_{0s}t})$$
$$= iH_{0s}e^{iH_{0s}t}F_s e^{-iH_{0s}t} - ie^{iH_{0s}t}F_s e^{-iH_{0s}t}H_{0s}$$
$$= i[H_{0I}, F_I]$$

这就是作用图象中的算符运动方程(10.1—9)式。

从(10.1—10)—(10.1—13)立即可得

$$(\langle a|F|b\rangle)_H = (\langle a|F|b\rangle)_s = (\langle a|F|b\rangle)_I$$

这就证明了三种图象的描述是等价的。今后,我们都采用相互作用图象。为了简单不再注明下标“I”。

2. 相互作用图象

在量子力学里，我们常用薛定格图象，但是在量子场论里，如果用薛定格图象，场算符 $\varphi(x)$ 将不是时间的函数，而仅仅是空间坐标的函数，场方程不具有明显的罗仑兹不变性。因此，前面几章我们都是在海森堡图象中讨论，那里场算符 $\varphi(x)$ 是时间和空间的函数，所得到的自由场和相互作用场方程都具明显的罗仑兹不变性。但是，我们已经看到，在相互作用情况下，H 图象中的场方程是一个非齐次（有时是非线性）的方程，要得到它们的解的封闭形式是困难的。这使得我们不能仿照自由场的方法，从同一时间的对易关系推广到不同时间的对易关系，即不能得到协变形式的对易关系。为了避免这一困难，我们采用相互作用图象。

由(10.1－8)、(10.1－9)知道，作用图象中，态方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle = H_i|\rangle \qquad (10.1-14)$$

表示在作用图象中态的演变只与相互作用哈密顿有关，而场算符的运动方程（这里 F 写成 φ）

$$\dot{\varphi} = i[H_0, \varphi] \qquad (10.1-15)$$

表示，在作用图象中，相互作用存在时的场的运动方程和海森堡图象中自由场的运动方程一样，只依赖于自由哈密 H_0。因此，相互作用图象里，相互作用情况下，场算符的不同时间对易关系也和海森堡图象自由场的对易关系一样，具有明显的罗仑兹不变性。

可见，对于相互作用的场系统，用相互作用图象讨论问题十分方便。

§10.2 量子场论的求解和 U 矩阵

在上节，我们看到相互作用图象中场算符服从自由场的运动规律和对易关系。因此，我们进一步的工作是求解作用图象中的态矢量。把互作用图象中的态矢的运动方程(10.1－14)改写为

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t> = H_i(t)|t> \qquad (10.2-1)$$

其中 $|t>$ 代表 $|>_I$，$H_i(t)$ 并不是 t 的显函数而只是通过场算符与 t 有关。

上式是 $|t>$ 的线性方程，而且对 t 又是一次微分方程。因此，只要给出一个初始条件，即给出某时刻 t_0 的初态 $|t_0>$ 则任意时刻 t 的态矢 $|t>$ 都可从 $|t_0>$ 按(10.2－1)的规律演化得到。

1. U 矩阵的定义

因为(10.2—1)是线性方程，所以态的演化也可用下面的数学式表述出来：

$$|t> = U(t,t_0)|t_0> \qquad (10.2-2)$$

其中 $U(t,t_0)$ 是一个表示时间演化的算符(矩阵)，又叫做 U 矩阵，上式就是 U 矩阵的定义式。

将(10.2—2)代入(10.2—1)得到 U 满足的微分方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_i(t)U(t,t_0) \qquad (10.2-3)$$

可见，对态方程的求解问题，转化为对 U 矩阵的求解问题。

2. U 矩阵的性质

U 矩阵有如下性质：

a. $U(t_0,t_0) = U(t,t) = 1$ （单位矩阵）

b. $U(t,t_0) = U(t,t_1)U(t_1,t_0)$ （可加性）

c. $U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0)$ （存在逆矩阵）

d. $\left.\begin{aligned} U^+(t,t_0)U(t,t_0) &= I \\ U(t,t_0)U^+(t,t_0) &= I \\ U^+(t,t_0) &= U^{-1}(t,t_0) \end{aligned}\right\}$ （幺正性）

证明：

性质 a：可由(10.2—2)直接看出。

性质 b：可在(10.2—2)中令

$$|t> = U(t,t_1)|t_1> \text{ 和 } |t_1> = U(t_1,t_0)|t_0>$$

则

$$|t> = U(t,t_1)U(t_1,t_0)|t_0> = U(t,t_0)|t_0>$$

$$\therefore U(t,t_0) = U(t_0,t_1)U(t_1,t_0)$$

性质 c：由性质 b，令其中 $t=t_0$则有

$$U(t_0,t_0) = U(t_0,t_1)U(t_1,t_0) = I$$

故有 $U(t_0,t)$ 和 $U(t,t_0)$都不为零，且

$$U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0)$$

性质 d：取(10.2－3)的厄米共轭并注意到 $H_i^+ = H_i$，得到：

$$-i\frac{\partial}{\partial t}U^+(t,t_0) = U^+(t,t_0)H_i(t) \qquad (10.2-4)$$

用 $U^+(t,t_0)$ 左乘(10.2－3)，减去 $U(t,t_0)$右乘(10.2－4)得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U^+(t,t_0)U(t,t_0)\} = 0$$

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0) = \text{常量}$$

利用 $U(t_0,t_0) = I$ 得到

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0) = I$$

类似地有 $\quad U(t,t_0)U^+(t,t_0) = I$

由于 $\quad U^{-1}(t,t_0)U(t,t_0) = I$

比较得： $\quad U^+(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) \qquad (10.2-5)$

由(10.2－5)和逆矩阵的存在性知 U 为幺正矩阵。

最后我们指出 U 的幺正性保证了几率守恒，即

$$\langle t|t\rangle = \langle t_0|U^+U|t_0\rangle = \langle t_0|t_0\rangle = I$$

3. U 矩阵的级数解

为便于求解，我们把微分方程(10.2－3)改写为积分方程。考虑到初始条件 $U(t_0,t_0) = 1$，就得到

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_i(t_1)U(t_1,t_0) \qquad (10.2-6)$$

这里 $t > t_1 > t_0$，用循环法求解这个积分方程可得：

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_i(t_1)\left[1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 H_i(t_2)U(t_2,t_0)\right] \\ &= 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_i(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2) \\ &\quad + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t,t_0)$$

其中

$$U^{(n)}(t,t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n H_i(t_1) \cdots H_i(t_n)$$

(10.2 — 7)

以上各式的积分上限受如下条件限制：

$$t > t_1 > t_2 \cdots\cdots > t_{n-1} \qquad (10.2-8)$$

而且积分上限各不相同，计算起来比较困难。为了消除这些限制，并使积分上限相同，我们引进"戴逊时序算符 P"，其定义是：当 P 作用于若干个有时间标志的算符时，其结果把这些算符乘积的顺序按时间先后自右至左排列，即较先的排在右边，较后的排在左边。例如，当 $t_l > t_j > t_k$ 时

$$P\{H_i(t_j)H_i(t_k)H_i(t_l)\} = H_i(t_l)H_i(t_j)H_i(t_k)$$

(10.2 — 9)

藉助"戴逊时序算符 P"，(10.2—7)可改写成：

$$U^{(n)}(t,t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t} dt_n \cdot P\{H_i(t_1) \cdots\cdots H_i(t_{n-1}) H_i(t_n)\}$$

(10.2 — 10)

在上式中由于引进了时序算符 P，使得 $t_1, t_2 \cdots\cdots t_n$ 等不再受条件(10.2 — 8)的限制。例如 t_1，可大于 t_2 也可小于 t_2，因此(10.2 — 10)的上限都应改为 t。这样，(10.2 — 10) 的积分区域要比(10.2 — 7)的积分区域大 $n!$ 倍，所以(10.2 — 10)式的积分号前出现一个因子 $\frac{1}{n!}$。为了更具体地了解这一点，我们在下面做进一步的证明。

先研究下面的二重积分

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)] \qquad (10.2-11)$$

由 P 算符的定义可知

$$P[H_i(t_1)H_i(t_2)] = \begin{cases} H_i(t_1)H_i(t_2) & \text{当 } t_1 \geqslant t_2 \\ H_i(t_2)H_i(t_1) & \text{当 } t_1 \leqslant t_2 \end{cases} \tag{10.2-12}$$

用上式可将(10.2—11)的积分分解为两部分，即

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)] \\ &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)] \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)] \\ &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_i(t_2)H_i(t_1) \end{aligned} \tag{10.2-13}$$

图10—1可见，(10.2—13)左边的积分范围是整个正方形，而右边的第一个积分的积分范围是三角形Ⅰ，第二个积分的积分范围是三角形Ⅱ。我们可改变第二积分的顺序，即先对 t_1 积分，然后对 t_2 积分，于是第二个积分写成

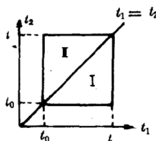


图 10—1

$$\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_i(t_2)H_i(t_1)$$

将上式的积分变数 $t_1 \leftrightarrows t_2$，其积分值应不变，即上式改写成

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2) \tag{10.2-14}$$

可见(10.2—13)右边的两个积分完全一样，于是(10.2—13)写成

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)]$$

$$= 2!\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2) \qquad (10.2-15)$$

或

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2) = \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)] \qquad (10.2-16)$$

令(10.2－7)中 $n=2$,并将上式代入则得

$$U^{(2)}(t,t_0) = \frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 P[H_i(t_1)H_i(t_2)]$$

将上述方法推广到 n 重积分的情况,则有

$$U^{(n)}(t,t_0) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n P[H_i(t_1)\cdots\cdots H_i(t_n)] \qquad (10.2-17)$$

§10.3 散射矩阵S和跃迁振幅

1.S矩阵的定义

在前面自由场理论中,我们对微观粒子的运动采用平面波的极限表示。因此,场与场之间的相互作用原则上在整个空间($V=\infty$),整个时间($T=\infty$)里进行。这是理论的抽象,实际观测的粒子不是抽象的平面波,而是波包,所以有效的相互作用不是在整个空间和整个时间里进行.但实践证明,这种理论抽象对实验结果是一个很好的近似,因此按照量子场论的相互作用理论,一个物理过程,动力系的初态应是它在 $t=-\infty$ 的物理态,即 $|-\infty>$,它的末态应是 $t=\infty$ 的物理态,即 $|\infty>$,按(10.2－2),初末态之间的联系是

$$|\infty> = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U(t,t_0)|-\infty> \qquad (10.3-1)$$

假使 $U(t,t_0)$ 存在确定的极限,我们就把这个极限定义为 S 矩阵,即

$$S \equiv \lim_{\substack{t \to \infty \\ t_0 \to -\infty}} U(t,t_0) \equiv U(\infty, -\infty) \qquad (10.3-2)$$

由于 U 是幺正矩阵，所以 S 也是幺正矩阵，即

$$S^+ = S^{-1}, \quad S^+ S = SS^+ = 1 \qquad (10.3-3)$$

利用(10.3—2)可将(10.3—1)写成

$$|\infty> = S|-\infty>$$

2. S 矩阵的展开式

由 S 矩阵的定义式有

$$S = U(\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(\infty, -\infty) \qquad (10.3-4)$$

令 $$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$$

则 $$S^{(n)} = U^{(n)}(\infty, -\infty)$$

$$= \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P[H_i(t_1)\cdots\cdots H_i(t_n)]$$

$$(10.3-5)$$

但 $$H_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathscr{H}_i(x) \qquad (10.3-6)$$

故(10.3—5)可写成

$$S^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n P[\mathscr{H}_i(x_1)\cdots\mathscr{H}_i(x_n)]$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = S^{(0)} + S^{(1)} + \cdots \qquad (10.3-7)$$

这就是 S 矩阵的展开式，当相互作用 $\mathscr{H}_i$ 很弱(微扰)时，在计算中，我们只取(10.3—7)的前面几项就近似准确了，这称为微扰近似。

3. 跃迁振幅

在实际物理实验中，粒子之间的相互作用的有效时间不是∞而是短暂的，但是相互作用的时间 T 被场论抽象为∞，实验仪器进行观测的时间比粒子间相互作用的有效时间长得多，即实验观测时间比有效相互作用时间应是更高级的∞。因此，实验观测的初

态和末态都是没有相互作用的自由场系统的物理态，初态$|-\infty>$是相互作用发生前自由场系统的一个物理态，末态$|\infty>$是相互作用完毕之后自由场系统的一个物理态。(所谓物理态是指自由的物理粒子态，即不同粒子之间虽无相互作用，但每个粒子同自已的辐射场始终有相互作用，其结果是实验观测的具有物理质量、物理电荷的物理粒子，而不是不存在自作用或者说不包含固有场的所谓裸粒子)。

设自由场系统的初态是一个确定的粒子态，记为$|i>$，通过相互作用$\mathscr{H}_i$，这个初态按(10.2—2)演化为下列末态

$$|\infty,i>=S|i>$$

按照量子力学，这个末态一般是许多相互正交的自由场系统本征态的线性叠加。假设$|f>$是自由场系统的一个确定的粒子态，它可能包含在末态$|\infty,i>$之中，那么，它包含在$|\infty,i>$之中的几率振幅是

$$<f|\infty,i>\equiv<f|S|i>$$

这就是从确定的初态$|i>$经过相互作用$\mathscr{H}_i$演化为确定的末态$|f>$的跃迁振幅，又称为S矩阵的fi矩阵元，简记为：

$$S_{fi}=<f|S|i> \qquad (10.3-8)$$

量子场的相互作用理论的一个重要任务是求出给定物理过程的跃迁振幅S_{fi}，然后从S_{fi}推算出各不同物理过程中由实验可以直接测定的跃迁几率。

§10.4 S矩阵的简化

上节指出，由于场的相互作用，使系统由一个确定的初态$|i>$跃迁至另一个确定的终态$|f>$，其跃迁振幅为$<f|S|i>$，而其中的S是含有无穷多项的各种算符的乘积。如何从这无穷多项中找出对我们所讨论的物理过程有贡献的一些项?这就是本节将要讨论的问题。

1.真空的定义　正规乘积

(1)真空的定义

所谓某种场 φ(或 ψ、A) 的真空，是指没有存在与该场相应的粒子的状态。因此，对某种场来说，其真空态的能量、动量、电荷都应等于零。因为负频算符 $\varphi^{(-)}$($\psi^{(-)}$、$A^{(-)}$等)是减小能量的算符(含消灭粒子的算符)，所以真空态 $|0>$ 可由下述条件定义(以 φ 场为例)

$$\varphi^{(-)}(x)|0>=0 \qquad (10.4-1)$$

这式的厄米共轭为

$$<0|\varphi^{(+)}(x)=0 \qquad (10.4-2)$$

归一化条件为

$$<0|0>=1 \qquad (10.4-3)$$

上面三式可做为真空的定义。利用产生和湮没算符，真空的等效定义可写成

$$a(k)|0>=0 \quad 或 \quad <0|a^*(k)=0 \qquad (10.4-4)$$

借助粒子的产生和湮没算符以及真空的定义，我们可以写出存在粒子 $a,b,\cdots,c$ 的初态为

$$|i>=a^*b^*\cdots\cdots c^*|0> \qquad (10.4-5)$$

存在粒子 $d,e\cdots\cdots f$ 的终态为

$$|f>=d^*e^*\cdots\cdots f^*|0> \qquad (10.4-6)$$

在散射、衰变等问题中，常要知道由某一确定的始态 $|i>$ 跃迁到某一定的终态 $|f>$ 的几率。从 S 矩阵的定义知，这个跃迁振幅为

$$<f|S|i>=<0|de\cdots\cdots f|S|a^*b^*\cdots\cdots c^*|0> \qquad (10.4-7)$$

(2)正规乘积

在前面几章关于自由场量子化的讨论中我们得到，不存在粒子的真空态，其能量、动量、电荷等物理量的数值为无穷大(或负无穷大)，这显然与事实不符。究其原因，是由于我们的数学处理存在不足之处。只要引进正规乘积的概念，便可消除这些无穷大的能量、动量、电荷等伪物理量。

另一方面，在微扰计算中，S 矩阵可展开成无穷级数 $\sum S^{(n)}$，每个 $S^{(n)}$ 中都包含着时序乘积 $P(\mathscr{H}_i(x_1)\cdots\cdots\mathscr{H}_i(x_n))$，而每一个 $\mathscr{H}_i(x)$ 又包含着各种场算符的乘积。例如，电磁相互作用的 $\mathscr{H}_i(x)$ 为

$$\mathscr{H}_i(x) = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi$$

在相互作用图象里，场算符 $\bar{\psi}$、ψ、A 或 φ 各包含着 $\psi^{(\pm)}$、$\bar{\psi}^{(\pm)}$、$A^{(\pm)}$ 或 $\varphi^{(\pm)}$ 类型的产生和消灭算符。所以，S 矩阵实际上包含着一系列的消灭和产生算符乘积的项。但是，并不是每一项都能对一给定的过程 $(i\rightarrow f)$ 作出贡献，在 S 阵中只有那些具有与始态粒子相对应的消灭算符及与终态粒子相对应的产生算符作为因子的项才对 $\langle f|S|i\rangle$ 给出贡献。在这样的算符乘积中也有可能包含着附加的一对对的产生和消灭算符，使产生新的粒子又立即将它消灭，这些虚粒子仅出现在中间状态。

为了计算方便起见，最好利用算符的对易关系把 S 矩阵中各项 的算符乘积排列成正规形式，即把所有的消灭算符都排列在右边 而产生算符都排列在左边，这样使我们很容易看出那些项对一给定的过程 $(i\rightarrow f)$ 的 S 矩阵元作出贡献，而那些项对这个过程并不作出贡献。于是就可能使各种物理过程的讨论大为简化。这是我们引入正规乘积概念的又一个原因。

正规乘积定义为：在一个算符乘积中，把所有的湮没算符都排在右边，所有的产生算符都排在左边。通常冠以记号 N 表明正规乘积，并且规定，在算符的这种重新排列过程中，每对调一对玻色场算符（或对调一个玻色场一个费米场算符）不改变符号，每对调一对费米场算符则改变一个负号。

a. 玻色场算符的正规乘积

根据定义有

$$N[\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x)] = N[\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)] = \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x) \qquad (10.4-8)$$

正规乘积服从乘法分配律，例如：

$$N[\varphi^*(x)\varphi(x)] = N[(\varphi^{*(-)}(x) + \varphi^{*(+)}(x))(\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x))]$$

$$
\begin{aligned}
&= N[\varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(+)}(x) \\
&\quad + \varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(+)}(x)] \\
&= \varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{*(-)}(x) \\
&\quad + \varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(+)}(x) \\
&= N[\varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(-)}(x)] + N[\varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(+)}(x)] \\
&\quad + N[\varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)] + N[\varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(+)}(x)]
\end{aligned} \tag{10.4-9}
$$

正规乘积与一般乘积只差一个函数，例如：

$$
\begin{aligned}
&N[\varphi(x)\varphi(x')] - \varphi(x)\varphi(x') \\
&\quad = \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(+)}(x')\varphi^{(-)}(x) \\
&\qquad + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x') + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x') \\
&\qquad - [\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x') \\
&\qquad + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x')] \\
&\quad = -[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')]
\end{aligned}
$$

利用对易关系(5.1—41)，上式写成

$$
\left.
\begin{aligned}
&N[\varphi(x)\varphi(x')] - \varphi(x)\varphi(x') = -i\Delta^{(+)}(x-x') \\
&N[\varphi^*(x)\varphi(x')] - \varphi^*(x)\varphi(x') = -i\Delta^{(+)}(x-x')
\end{aligned}
\right\} \tag{10.4-10}
$$

(第二式为"同理")

可证 $$N[\varphi(x)\varphi(x')] = N[\varphi(x')(x)] \tag{10.4-11}$$

b. 费米场算符的正规乘积

根据定义有

$$
N[\psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(x')] = -N[\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x)] = -\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x)
$$

$$
\begin{aligned}
N[\psi^{(-)}(x)\psi^{(-)}(x')] &= -N[\psi^{(-)}(x')\psi^{(-)}(x)] = -\psi^{(-)}(x')\psi^{(-)}(x) \\
&= \psi^{(-)}(x)\psi^{(-)}(x')
\end{aligned}
$$

容易证明费米子场的正规乘积服从乘法分配律，并且它与一般乘积之差也是一个函数。例如

$$
\begin{aligned}
&N[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')] - \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x') \\
&\quad = [\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(x') - \psi_\beta^{(+)}(x')\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \\
&\qquad + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)_\beta^{(-)}(x') + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(x')] \\
&\quad - [\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(x') + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(+)}(x')
\end{aligned}
$$

$$+\ \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(-)}(x')+\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(x')]$$

$$=-\left[\psi_\beta^{(+)}(x'),\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\right]_+$$

利用(6.3—11)式可将上式写成

$$\left.\begin{aligned}
&N[\bar{\psi}_\alpha(x),\psi_\beta(x')]-\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')=iS_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x)\\
\text{同理}\quad &N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')]-\psi_\alpha(x)-\bar{\psi}_\beta(x')=iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')\\
&N[\psi(x)\psi(x')]-\psi(x)\psi(x')=0\\
&N[\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')]-\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')=0
\end{aligned}\right\}$$

$$(10.4-12)$$

此外,还可证明

$$N[\psi(x)\bar{\psi}(x')]=-N[\bar{\psi}(x')\psi(x)]\qquad(10.4-13)$$

今后,我们认为,所有的物理量,如拉氏密度、能量、动量、电流、电荷等的算符表达式都是正规乘积。这时以前的推导都没有影响,只是在结果上可能相差一个普通的数。根据前面真空和正规乘积定义,我们可以看出,所有用正规乘积表示的物理量,其真空平均值皆为零。即

$$<0|N[\varphi^*(x)\varphi(x')\psi(x)\cdots\cdots]|0>=0\qquad(10.4-14)$$

因此,用正规乘积表示物理量算符后,就消除了真空中的物理量(无穷大量),前面所出现的真空中能量、动量、电荷等的无穷大困难就不存在了。

2. 算符的收缩

(1)Wick 时序乘积 T

Wick 时序乘积 T 和 Dyson 的时序乘积 P 相似,两者都是使算符乘积,按时间先后自右至左排列。所不同的是,对时序乘积 T,算符在上述重新排列时,每对调一对费米子增加一个负号,因此,两者的关系是

$$T(UV\cdots\cdots W)=(-1)^n P(UV\cdots\cdots W)\qquad(10.4-15)$$

n 为按时间顺序排列时须对调费米子场的次数。

对费米场

$$T[\psi(x)\psi(y)]=\begin{cases}\psi(x)\psi(y) & \text{当 } x_0>y_0\\ -\psi(y)\psi(x) & \text{当 } x_0<y_0\end{cases}\qquad(10.4-16)$$

对玻色场

$$T[\varphi(x)\varphi(y)] = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(y) & \text{当 } x_0 > y_0 \\ \varphi(y)\varphi(x) & \text{当 } x_0 < y_0 \end{cases} \tag{10.4-17}$$

一般表示成

$$N(UV\cdots\cdots W) = (-1)^n (U'\ V'\ \cdots W')$$

$U'V'\cdots\cdots W'$ 是将 $UV\cdots W$ 重新排列成所有消灭算符均在右边的正规形式，指数 n 代表重新排列时需要对调费米场算符对的次数。

在 Yukawa 耦合中，费米场总是成对出现在相互作用哈密顿 $\mathscr{H}_i$ 中，所以，我们可以将 S 矩阵中的时序算符 P 改写成时序算符 T。

(2)算符的收缩

现在来讨论如何将时序乘积表示为正规乘积的问题。为此目的，我们引进'算符收缩'的定义：两个算符 U、V 的时序乘积与其正规乘积的差称为'算符收缩'，记为 $\underbrace{UV}$。即

$$T(UV) = N(UV) + \underbrace{UV} \tag{10.4-18}$$

显而易见，将两个算符的时序乘积用正规乘积来表示时，必须利用对易(或反易)关系适当调换二算符的位置，由此产生了附加的项 $\underbrace{UV}$。在相互作用图象中，场算符的对易关系必定为普通的数，可见 $\underbrace{UV}$ 亦必定为普通的数而不是算符了，所以称之为算符收缩。

对(10.4－18)式两边取真空平均值，由于普通函数的真空平均值仍为原来的函数，而正规乘积的真空平均值为零，即

$$<0|\underbrace{UV}|0> = \underbrace{UV}$$

$$<0|N(UV)|0> = 0$$

故算符的收缩等于时序乘积的真空平均值，即

$$\underbrace{UV} = <0|T(UV)|0> \tag{10.4-19}$$

a.介子场算符的收缩

先讨论 U、V 为单独的产生或消灭算符的情形。由定义式(10.4-18)有：

$$\underbrace{\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}}(y) = T(\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)) - N(\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)) \tag{10.4-20}$$

根据 T 和 N 的定义，当时间 $x_0>y_0$，上式为

$$\begin{aligned}\underbrace{\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}}(y) &= \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y) - \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)\\ &= [\varphi^{(-)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)]\end{aligned}$$

即
$$\underbrace{\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}}(y) = i\Delta^{(+)}(x-y) \text{ 当 } x_0 > y_0 \qquad (10.4-21)$$

但当 $x_0 < y_0$ 时(10.4—20)为

$$\underbrace{\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}}(y) = 0 \qquad \text{当 } x_0 < y_0 \qquad (10.4-21')$$

更一般的情况，若 U、V 均为玻色场算符 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$，则有

$$\begin{aligned}\underbrace{\varphi(x)\varphi}(y) &= T(\varphi(x)\varphi(y)) - N(\varphi(x)\varphi(y))\\ &= \begin{cases}+\, i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{当 } x_0 > y_0\\ -\, i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{当 } x_0 < y_0\end{cases}\end{aligned} \qquad (10.4-22)$$

上式右边正是我们在第八章(8.2—11)式所引进的介子场的传播函数 $\Delta_F(x-y)$。所以，介子场两点的场算符 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$的收缩正是这个场在这两点之间的传播函数，即

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = \Delta_F(x-y) \qquad (10.4-23)$$

b. 电磁场算符的收缩

量子电磁场的情况与量子介子场相似，两点场算符的收缩定义为

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(y) = T[A_\mu(x)A_\nu(y)] - N[A_\mu(x)A_\nu(y)]$$

类似介子场的计算可得

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu}(y) = \delta_{\mu\nu}D_F(x-y) \qquad (10.4-24)$$

所以电磁场两点算符的收缩就是电磁场在这两点间的传播函数。D_F 的定义见(8.3—7)。

c. 费米场算符的收缩

费米场算符的收缩，按定义有

$$\begin{aligned}\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y) &= T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] - N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]\\ &= T[\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) + \psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\\ &\quad + \psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) + \psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)]\\ &\quad - N[\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) + \psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\end{aligned}$$

$$+\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)+\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)]$$

当 $x_o > y_o$ 时，(利用(8.4—1))

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)=[\psi_\alpha^{(-)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)]_+=-iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y)$$

当 $x_o < y_o$ 时(利用(8.4—1))

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)=-[\psi_\alpha^{(+)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+=iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y)$$

所以

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)=\begin{cases}-iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) & \text{当 } x_0>y_0\\ iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y) & \text{当 } x_0<y_0\end{cases}\tag{10.4—25}$$

利用(8.4—7)式，上式写成

$$\left.\begin{aligned}\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)&=S_{F,\alpha\beta}(x-y)\\ \underbrace{\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha}(x)&=-S_{F,\alpha\beta}(x-y)\end{aligned}\right\}\tag{10.4—26}$$

可证

可见收缩因子内费米场交换位置服从反对称性(玻色场服从对称性)。另外有

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\psi_\beta}(y)=\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)=0\tag{10.4—27}$$

d. 两个不同场算符的收缩为零

可以证明，两个不同场算符的收缩等于零

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\varphi}(y)=\underbrace{\psi_\alpha(x)A_\mu}(y)=\underbrace{A_\mu(x)\psi}(y)=\cdots\cdots=0\tag{10.4—28}$$

例如：

$$\begin{aligned}\underbrace{\psi_\alpha(x)A_\mu}(y)&=T(\psi_\alpha(x)A_\mu(y))-N(\psi_\alpha(x)A_\mu(y))\\&=T[\psi_\alpha^{(-)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+\psi_\alpha^{(-)}A_\mu^{(+)}(y)\\&\quad+\psi_\alpha^{(+)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+\psi_\alpha^{(+)}(x)A_\mu^{(+)}(y)]\\&\quad-N[\psi_\alpha^{(-)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+\psi_\alpha^{(-)}(x)A_\mu^{(+)}(y)\\&\quad+\psi_\alpha^{(+)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+\psi_\alpha^{(+)}(x)A_\mu^{(+)}(y)]\end{aligned}$$

当 $x_o > y_o$ 时

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)A_\mu}(y)=[\psi_\alpha^{(-)}(x),A_\mu^{(+)}(y)]=0$$

当 $x_o < y_o$ 时

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)A_\mu}(y)=[\psi_\alpha^{(-)}(x),A_\mu^{(+)}(y)]=0$$

所以 $\quad\underbrace{\psi_\alpha(x)A_\mu}(y)\equiv 0$

e. 正规乘积中，同一时刻的场算符收缩为零

设 $\psi_\alpha(x)$ 和 $\bar{\psi}_\beta(x)$ 是两个同时刻的场算符，并处于同一正规乘积 N 的内部。按时序乘积 T 的定义有

$$T\{N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)]\} = N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)]$$

按 N 乘积的定义，显然有

$$N\{N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)]\} = N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)]$$

即正规乘积算符 N 满足 $N^2=N$；同样，时序算符也满足 $T^2=T$。根据算符收缩的定义有

$$\begin{aligned} N[\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)}] &= T\{N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]\} - N\{N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)]\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10.4-29}$$

上面 $N[\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)}]$ 表示 $\psi_\alpha(x)$ 和 $\bar{\psi}_\beta(x)$ 的 N 乘积的收缩，而不是收缩的 N 乘积，因为收缩后不再是算符，因而后者是没有意义的。

3. Wick **定理**

物理量取正规乘积，要求场的相互作用哈密顿 $\mathscr{H}_I$ 也取正规乘积。这样，S 矩阵元就变成 T 和 N 的混合乘积。算符 T 要求场算符按时间先后排列，算符 N 要求场算符按消灭和产生算符顺序排列。由于算符之间存在对易关系，我们可以找到两种乘积之间的联系（如算符收缩的表达式）。Wick 研究了这个问题，给出两者之间的一般关系，提出 Wick 定理。

Wick **第一定理**：m 个算符的 T 乘积可以唯一地展开成含有各种可能的收缩因子的 N 乘积之和，其中包括不含收缩因子的零个收缩因子的 N 乘积。可用数学式子表达如下：

$$\begin{aligned} T(ABCD\cdots\cdots Z) &= N(ABCD\cdots\cdots Z) \\ &+ (-1)^P\underbrace{AB}(CD\cdots\cdots Z) + (-1)^P\underbrace{AC}N(BD\cdots\cdots Z) + \cdots\cdots \\ &+ (-1)^P\underbrace{AB}\,\underbrace{CD}N(E\cdots\cdots Z) + (-1)^P\underbrace{AC}\,\underbrace{BE}N(DF\cdots\cdots Z) + \cdots\cdots \\ &+ (-1)^P\underbrace{AB}\,\underbrace{CD}\,\underbrace{EF}N(G\cdots\cdots Z) + \cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned} \tag{10.4-30}$$

$ABCD\cdots Z$ 是场算符，其中每对收缩算符的顺序，按照它们在原来乘积 $ABC\cdots Z$ 中的相对顺序，正规算符 N 写在余下的算符前面，指数 P 为进行收缩时需要互调费米算符的次数。上式右端各

项以后用正规乘积内部算符收缩的记号来表示，这个记号定义如下：

$$N(\underbrace{ABC}\underbrace{D\cdots JK}L\cdots Z) = (-1)^P \underbrace{AC}\,\underbrace{DK}N(B\cdots JL\cdots Z)$$

Wick 第一定理可用数学归纳法证明，由于冗长，我们把它放在附录Ⅲ中进行。

Wick **第二定理：** 将混合乘积展成正规乘积时，仍按第一定理的方法展开，只需将同一正规乘积内同一时间的场算符收缩除去（证明见附录Ⅲ）。

注意到同一正规乘积内同时间的场算符的收缩等于零，上述定理马上得证。

实际应用中，常遇到这种混合乘积。例如轻子与电磁场相互作用的 $\mathscr{H}_i(x)$ 是

$$\mathscr{H}_i(x) = -ieN\{\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)\}$$

S 矩阵的展开式中出现如下的混合乘积

$$T\{N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_1}\cdots\cdots N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_n}\}$$

这时，应略去如下各收缩项，如

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_j)\hat{A}}(x_j)\psi(x_j); \quad \bar{\psi}(x_j)\underbrace{\hat{A}(x_j)\psi}(x_j); \quad \underbrace{\bar{\psi}(x_j)\hat{A}\psi}(x_j)$$

等项应略去。

用 Wick 定理，可将混合乘积的 S 矩阵元展开成正规乘积，每一个正规乘积相当于某一定的物理过程，由未收缩的算符表征，这些算符消灭始态的粒子，产生终态的粒子，而收缩算符可解释为在中间状态中虚粒子的产生和消灭。

§10.5 费曼图

1). 在上节我们讨论了如何将 S 矩阵中的混合时序乘积展开为正规乘积的和。不难看出，如果仅用公式化的数学方法来处理具体的物理问题，其手续将是十分复杂的。然而，费曼及戴逊创立了一种图形方法，可以把每一个正规乘积的物理意义形象地表示出来。利用这种图形和正规乘积之间的一对一的对应关系，我们就容

易写出某一具体过程的 S 矩阵元。

在这里我们只讨论电磁相互作用的情况，因为强相互作用原则上不能用微扰论来处理，而弱作用又常常无须考虑高级修正。掌握了费曼图的基本方法后，很容易推广到其它情况。现以量子电动力学中的 $S^{(2)}$ 为例，说明如何建立费曼图形的方法。这里

$$S^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2T\{N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)x_1N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)x_2\}$$

(10.5 — 1)

应用维克第二定理并考虑到 $\underbrace{\psi\psi}=\underbrace{\bar{\psi}\bar{\psi}}=\underbrace{\psi A}=\underbrace{\bar{\psi}A}=0$，可将(10.5—1)式中的混合的时序乘积展成下列八个 N 乘积的和：

$$\begin{aligned}&T\{N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_1}N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_2}\}\\&=N\{(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_2}\}+N\{(\bar{\psi}\underbrace{\hat{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\hat{A}}\psi)_{x_2}\}\\&\quad+N\{(\bar{\psi}\hat{A}\underbrace{\psi)_{x_1}(\bar{\psi}}\hat{A}\psi)_{x_2}\}+N\{(\underbrace{\bar{\psi}\hat{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\hat{A}\psi})_{x_2}\}\\&\quad+N\{(\bar{\psi}\underbrace{\hat{A}\underbrace{\psi)_{x_1}(\bar{\psi}}\hat{A}}\psi)_{x_2}\}+N\{(\underbrace{\bar{\psi}\underbrace{\hat{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\hat{A}}\psi})_{x_2}\}\\&\quad+N\{(\underbrace{\bar{\psi}\hat{A}\underbrace{\psi)_{x_1}(\bar{\psi}}\hat{A}\psi})_{x_2}\}+N\{(\underbrace{\bar{\psi}\underbrace{\hat{A}\underbrace{\psi)_{x_1}(\bar{\psi}}\hat{A}}\psi})_{x_2}\}\end{aligned}$$

(10.5 — 2)

应该特别注意，在上面展式中的第三项与第四项代入 $S^{(2)}$ 后，所得出的积分完全一样，这是由于在相互作用哈密顿密度 $\mathcal{H}_i(x)$ 中包含有一对费米算符 $\bar{\psi}$ 和 ψ，如果在正规乘积内将二个 $\mathcal{H}_i$ 的位置互调(亦即将积分变量 x_1 与 x_2 互调)，结果仍是一样。因此，对这二项的 积分合并起来，就等于只取其中一项的积分并将积分前面的因子$\frac{1}{2!}$消去。与此相似，在展式(10.5 — 2)中的第五项和第六项对 $S^{(2)}$ 的贡献也是相等的，结果亦取一项的贡献并将因子$\frac{1}{2!}$消去。

现在我们用图形来表示各个正规乘积。每一费米算符的收缩 $\underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}}(x_1)$ 或 $\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\psi}(x_2)$ 作一根带箭头的实线由 x_1 至 x_2 来代表，这种线称为内轻子线。光子算符的收缩 $\underbrace{A(x_2)A}(x_1)$ 用一根连接 x_1 至 x_2 的虚线来代表，这种线称为内光子线。一个光子算符 $A(x_1)$ 用一端连结在 x_1 点的虚线代表，一个费米算符 $\psi(x_1)$ 以一根指向 x_1 点的

带箭头实线来代表，而 $\bar{\psi}(x_1)$ 则以一根从 x_1 点出发的带箭头的实线来代表，如图 10 — 2。应用这种作图法则我们可将(10.5 — 2)式中的八个正规乘积用图 10 — 3 来表示。各图的编号，分别对应于(10.5 — 2)式右边各项的顺序。可以看出，代表第三项和第四项的图形(3) 和(4) 是完全相同的，只不过 x_1 和 x_2 的位置互调而已。一般说，如果有二个图形，将其中一个的 x_1 和 x_2 的位置互换一下就得到完全相同的图形，则称之为等效图形，它们不代表任何新的正规乘积。代表展式(10.5—2)第五项和第六项的图(5)和图(6)也是等效图形，但图(1)和(2)，(7)和(8)则不是等效图形。

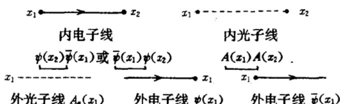


图 10—2

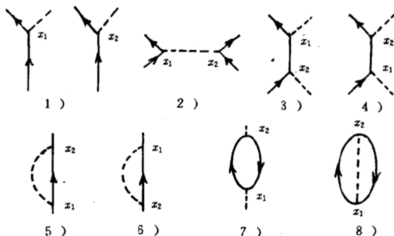


图 10—3

因为 ψ、$\bar{\psi}$、A 都可分解为正负频率部分的和，代表各种粒子的产生和消灭算符，即

$$\psi = \psi^{(-)} + \psi^{(+)} = \text{电子消灭} + \text{正电子产生}$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)} = \text{电子产生} + \text{正电子消灭}$$

$$A = A^{(-)} + A^{(+)} = \text{光子消灭} + \text{光子产生}$$

因此，在上述的每一个 N 乘积仍可分解为若干个以产生算符和消灭算符作为因子的乘积，它们各代表不同的物理过程。例如，代表第二项 N 乘积的图(2)可反映下列各种物理过程：

(a)二个电子相互散射

(b)二个正电子相互散射

(c)一个电子与一个正电子相互散射

因此当讨论某一具体物理过程时，必须先将正规乘积中对这一过程有贡献的部分挑选出来。

2). 费曼用稍为复杂一些的图形记号，使能区别出一个正规乘积所反映的各种物理过程。规定时间的正方向向上，这样可表明反应前的粒子由图形的下部进入，而反应后的粒子由图形的上部出来。同时为了区分正反粒子，规定外电子线的箭矢方向向上、外正电子线的箭矢方向向下。至于连结内粒子线二个顶点 x_1 和 x_2 的时间则不受上述规定的限制($x_{10} > x_{20}$ 或 $x_{10} < x_{20}$)。下表说明时空坐标中的各种图形记号，其中纵轴表示时间，横轴表示空间。

按照这种规定，可将上述的图10－3 2)区分为图10－4四种费曼图。

其中图 a)代表电子相互散射；b)代表正电子相互散射；而 c)和 d)代表电子与正电子散射，二者只有在中间状态才有区别。

同样，图10－3 3)或4)也可区分为图10－5四个费曼图。

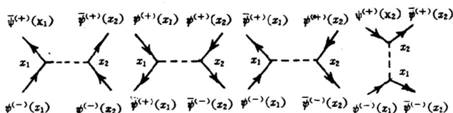


图 10－4

坐标空间中图形记号与 S 矩阵的对应关系

	费曼图的记号	S 矩阵中的因子
外电子线	x　　x	$\psi^{(-)}(x)$　$\bar{\psi}^{(+)}(x)$
外正电子线	x　　x	$\bar{\psi}^{(-)}(x)$　$\psi^{(+)}(x)$
外光子线	x　　x	$A^{(-)}(x)$　$A^{(+)}(x)$
内费米子线	x_1　　x_2	$\underbrace{\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_1)}$ $=[S_F(x_2-x_1)]_{\alpha\beta}$
内光子线	x_1,μ　　x_2,ν x_2,ν　　x_1,μ	$\underbrace{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)}$ $=\delta_{\nu\mu}D_F(x_2-x_1)$
顶角	μ　x	$e\gamma_\mu$

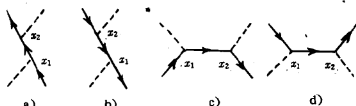


图 10—5

这里图 a)和 b)分别代表电子和正电子的康普顿散射，图 c)代表正负电子偶转变为光子，而图 d)则为光子转变为正负电子偶。

3). 从 S 矩阵元与费曼图一对一的相应关系，使我们计算具体物理过程得到很大的益处。首先我们可作出所讨论的物理过程的图形，然后写出相应的正规乘积。下面以康普顿散射为例来说明。

康普顿散射在始态中有一个电子和一个光子，终态也有一个电子和一个光子，这就要求正规乘积的因子必须包含有费米子和光子的消灭算符及它们的产生算符。因此至少要包括有两个 $\mathscr{H}_I$ 作因子的正规乘积。由于 $\alpha \equiv e^2/4\pi = \dfrac{1}{137}$（精细结构常数）是一个小的数值，因此作第一次近似计算时可以只考虑 $S^{(2)}$，而将 S 矩阵展式中的高次项略去，于是

$$S = S^{(2)} = e^2\int \mathrm{d}^4x_2\int \mathrm{d}^4x_1 N\{(\bar{\psi}\hat{A}\underbrace{\psi)_{x_2}(\bar{\psi}}\hat{A}\psi)_{x_1}\} \tag{10.5-3}$$

首先我们作出描写康普顿散射的二个可能的费曼图形。应该注意这二个费曼图不是等效图形，它们不同之处在于对调了进入光子线和外出光子线的位置。一般地说，凡是对调一种粒子的进入线和外出线所得到的图形和原来的图形是不等效的，而对于下列的每一个图形都有二个等效图形。

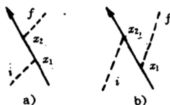


图 10—6

现在可根据这二个图形来计算(10.5—3)式。由于始态电子在 x_1 被消灭及在 x_2 产生终态电子，故在(10.5—3)式中的 $N\{\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)\}$ 可只写

$$N\{\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)\} = \bar{\psi}^{(+)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1)$$

而始态光子在 x_1 消灭或在 x_2 消灭都给出康普顿效应，故(10.5—3)式中的 $N\{A(x_2)A(x_1)\}$ 应写为

$$N\{A(x_2)A(x_1)\} = A^{(+)}(x_2)A^{(-)}(x_1) + A^{(+)}(x_1)A^{(-)}(x_2)$$

因此所求的 $S^{(2)}$ 可表示为二项，分别对应上面的二个图形

$$S^{(2)} = e^2\int d^4x_2\int d^4x_1\bar{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2)\underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_1)$$
$$+ e^2\int d^4x_2\int d^4x_1\bar{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_1)\underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1) \tag{10.5—4}$$

其中 $\underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)} = S_F(x_2 - x_1)$ 为费米子的传播函数。

(10.5—4)式的结果我们也可按照上面二个图形直接写出，但必须注意实验观察到的仅是这二个图形的总和才反映康普顿散射。将 S 矩阵元分开为二项各对应于二个独立图形虽然在计算上很有用处，但一般说来是没有确定的物理意义的，因为这二个图形的效果是一样的，仅当我们对中间过程给予某一确定的物理解释时，它们才有差别。例如，当 $x_{10} < x_{20}$ 时，图 a) 可想像为电子在 x_1 吸收光子 i 然后传播至 x_2 发射光子 f，图 b) 可想像为在 x_1 发射光子 f 然后传播至 x_2 吸收光子 i。但当 $x_{20} < x_{10}$ 时，图 a(或图 b) 在 x_2 吸收光子 f(或发射光子 i)产生正电子，传播至 x_1 发射光子 i(或吸收光子 f)。所以，中间费米子为电子或正电子视 $x_{20} \gtrless x_{10}$ 而定，它们都用传播函数 $\underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}$ 描写，而相应的图形是由 x_1 指向 x_2 的箭矢来表示。凡是处在中间状态的粒子，我们都称之为虚粒子。

在散射问题中，始态粒子和终态粒子都用动量和能量来标志，故在实际计算中用动量空间较为方便。

§ 10.6 动量表象

1. 动量表象

应用动量表象来计算 S 矩阵元要比坐标表象更为适宜，因为在实际问题中相互作用前后的始态和终态常常是自由粒子，在大多数情况下是由给定的动量和它们的内禀自由度（例如，光子的极化，费米子的自旋）来表征这些粒子的态。

为了从坐标表象过渡到动量表象，我们可应用各种场量的平面波展式。在下面我们假定场量在单位体积内规一化，因此由连续的 p 过渡到分立的 p 有如下的关系：

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}k \to \sum_k, \qquad a(k) \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}a_k$$

可以将 $A^{(\pm)}(x)$、$\psi^{(\pm)}(x)$、$\bar{\psi}^{(\pm)}$等表达为

$$A^{(-)}(x) = \sum_{k,m} \frac{e_\mu^m}{\sqrt{2\omega_k}} a_{k,m} e^{ikx} \qquad \text{（光子消灭）}$$

$$A^{(+)}(x) = \sum_{k,m} \frac{e_\mu^m}{\sqrt{2\omega_k}} a_{k,m}^* e^{-ikx} \qquad \text{（光子产生）}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u^{(s)}(p) a_{s,p} e^{ipx} \qquad \text{（电子消灭）}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}^{(s)}(p) a_{s,p}^* e^{-ipx} \qquad \text{（电子产生）}$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u^{(s)}(p) b_{sp} e^{ipx} \qquad \text{（正电子消灭）}$$

$$\psi^{(+)}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u^{(s)}(p) b_{s,p}^* e^{-ipx} \qquad \text{（正电子产生）}$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2k_0}} a_k e^{ikx} \qquad \text{（介子消灭）}$$

$$\varphi^{(+)}(x)=\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}a_k^* e^{-ikx} \qquad \text{（介子产生）}$$

在写出 S 矩阵元的表式时，以上各公式中的消灭和产生算符可以省略，因为 S 矩阵作用于初态（末态）的态矢量 $a^*|0>$ 时，产生算符 a^* 正好和 S 矩阵中的消灭算符抵消，即 $aa^*|0>=|0>$。在以后写 S 矩阵元时，真空态矢量 $|0>$ 亦省略不写（因为 $<0|0>=1$）。

另一方面，利用公式（8.2—15）、（8.3—8）和（8.4—9）可写出如下的传播函数：

$$\left.\begin{aligned}
&\underbrace{\varphi_i(x)\varphi_j(x')}=\delta_{ij}\Delta_F(x-x')=\frac{-i\delta_{ij}}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+m^2-i\varepsilon}\\
&\underbrace{A_\mu(x)A_\nu(x')}=\delta_{\mu\nu}D_F(x-x')=\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-i\varepsilon}\\
&\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')}=S_{F,\alpha\beta}(x-x')=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{(i\hat{p}-m)_{\alpha\beta}}{p^2+m^2-i\varepsilon}e^{ip(x-x')}\\
&\text{另外，}\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')}=-S_{F,\beta\alpha}(x'-x)
\end{aligned}\right\}$$

（10.6 — 1）

上式分母中的 $-i\varepsilon$ 是微小的负虚数，积分后令 $\varepsilon\to 0$ 为极限。以后为了书写简便起见，常常将 $-i\varepsilon$ 不写出来，作实际计算时必须记住这一点。

将以上的公式代入坐标表象中的 S 矩阵元的公式，则积分号内的变量 x 就只出现在 e 的指数中，再应用狄拉克函数中常用的公式

$$\int d^4x e^{-ipx}=(2\pi)^4\delta(p)$$

化简，就可以写出动量表象中的 S 矩阵元，然后将 S 矩阵元与费曼图形对比，可总结出借助费曼图写出 S 矩阵元的规律。下面以电子的康普顿散射为例来说明这一点。

2. 电子 Compton 散射 S 矩阵元

Compton 散射的初态有一个光子和一个电子，态矢表示成

$$|i>=a^*_{p_i,s_i}a^*_{k_i,m_i}|0>$$

末态有一个光子和一个电子，态矢表示成

$$|f> \doteq a^*_{p_f,s_f} a^*_{k_f,m_f}|0>$$

考虑至二级近似，对 Compton 散射有贡献的矩阵元为（利用（10.5—3））

$$<f|S^{(2)}|i> = e^2\int d^4x_1\int d^4x_2 <f|N[(\bar\psi\hat A\underbrace{\psi)_{x_2}(\bar\psi}\hat A\psi)_{x_1}]|i>$$

（10.6 — 2）

上式的正规乘积可展开成十六项，但对电子 Compton 散射有贡献的只有下面两项（它能消灭初态的电子和光子，并产生末态的电子和光子）：

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}N\{\bar\psi^{(+)}(x_2)[\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2)\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\\
&\qquad + \gamma_\nu A_\nu^{(-)}(x_2)\gamma_\mu A_\mu^{(+)}(x_1)]\psi^{(-)}(x_1)\}\\
&= \bar\psi^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2)\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_1)\\
&\qquad + \bar\psi^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\mu^{(+)}(x_1)\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}\gamma_\mu A_\nu^{(-)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1)
\end{aligned}$$

（10.6 — 3）

代入前式得

$$\begin{aligned}
&<f|S^{(2)}|i>\\
&= <f|e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\{\bar\psi^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2)\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_1)\\
&\quad + \bar\psi^{(+)}(x_1)\gamma_\nu A_\mu^{(+)}(x_1)\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}\gamma_\mu A_\nu^{(-)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1)\}|i>
\end{aligned}$$

（10.6 — 4）

先计算第一项，利用

$$\begin{aligned}
\psi^{(-)}(x_1)a^*_{p_i,s_i}|0> &= \sum_{p,s}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{p,s}e^{ipx_1}a_{p,s}a^*_{p_i,s_i}|0>\\
&= \sum_{p,s}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{p,s}e^{ipx_1}[a_{p,s},a^*_{p_i,s_i}]|0>\\
&= \sqrt{\frac{m}{E_{p_i}}}u_{p_i,s_i}e^{ip_ix_1}|0>
\end{aligned}$$

同理有

$$A_\mu^{(-)}(x_1)a^{+}_{k_i,m_i}|0> = \frac{e_\mu^{m_i}(k_i)}{\sqrt{2\omega_{k_i}}}e^{ik_ix_1}|0>$$

联合两式有(为简便用下标 i(或 f)表示初(末)态动量和自旋或极化)

$$A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_1)|i> = \sqrt{\frac{m}{E_i}}u_i\frac{e_\mu^{m_i}(k_i)}{\sqrt{2\omega_i}}e^{i(p_i+k_i)x_1}|0>$$

同理 $<f|\bar{\psi}^{(+)}(x_2)A_\nu^{(-)}(x_2) = <0|\bar{u}_f\frac{e_\nu^{m_f}(k_f)}{\sqrt{2\omega_f}}e^{-i(p_f+k_f)x_2}$

将上面两个结果以及传播函数(收缩)代入(10.6—4),第一项得(并利用$\int d^4xe^{\pm ipx} = (2\pi)^4\delta(p)$)

$$\int d^4p\underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_f}}\bar{u}_f}_{①}\underbrace{(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta(p-p_f-k_f)}_{②}\cdot\underbrace{\frac{e_{\nu f}}{\sqrt{2\omega_f}}}_{③}\underbrace{\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}}_{④}\underbrace{(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p_i+k_i-p)}_{⑤}\cdot\underbrace{\frac{e_{\mu i}}{\sqrt{2\omega_i}}}_{⑥}\underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_i}}u_i}_{⑦}\qquad(10.6-5)$$

类似地可得到(10.6—4)的第二项为

$$\int d^4p\underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_f}}\bar{u}_f}_{①}\underbrace{(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta(p+k_i-p_f)}_{②}\underbrace{\frac{e_{\nu i}}{\sqrt{2\omega_i}}}_{③}\underbrace{\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}}_{④}\cdot\underbrace{(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p_i-k_f-p)}_{⑤}\underbrace{\frac{e_{\mu,f}}{\sqrt{2\omega_f}}}_{⑥}\underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_i}}u_i}_{⑦}\qquad(10.6-6)$$

3. Feynman 规则

根据上述结果,我们可以得到费米子和电磁场相互作用的费曼图规则如下(动量表象):

(1)每一条内光子线贡献一个因子

$$\int d^4k\delta_{\mu\nu}D_F(k); \quad D_F(k) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}$$

(2)每一条内电子线贡献一个因子

$$\int d^4pS_F; \quad S_F(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$$

(3)每一条外来(消灭)电子线贡献一个因子 $\sqrt{\frac{m}{E}}u_s$

每一条外出(产生)电子线贡献一个因子 $\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_s$

(4)每一条外来正电子线贡献一个因子 $\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{v}_s$

每一条外出正电子线贡献一个因子 $\sqrt{\frac{m}{E}}v_s$

(5)每一条外来或外出光子线贡献一个因子 $\frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}}$

(6)每一个顶角贡献一个因子

$$-e(2\pi)^4\gamma_\mu\delta(\sum p)$$

其中 $\sum p$ 代表顶角处相遇的电子线与光子线的能量——动量四矢量的和。

(7)每一封闭的电子线多角形,贡献矩阵的一个迹和一个因子(−1)。

上面第(7)条举例证明如下:

设 $\psi,\bar{\psi}$ 为费米子算符,A_μ,A_ν 为其它场算符,则与图10—7对应的算符乘积是

$$\begin{aligned}
&(\bar{\psi}\hat{A}_\mu\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\hat{A}_\nu\psi)_{x_2} \\
&= \bar{\psi}_\alpha(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)\hat{A}_{\nu,\rho\sigma}(x_2)\psi_\sigma(x_2) \\
&= \bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\sigma(x_2)\hat{A}_{\mu,\alpha\beta}(x_1)\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)A_{\nu,\rho\sigma}(x_2) \\
&= (-1)\ S_{F,\sigma\alpha}(x_2 - x_1)\hat{A}_{\mu,\alpha\beta}(x_1)S_{F,\beta\rho}(x_1 - x_2)\hat{A}_{\nu,\rho\sigma}(x_2) \\
&= (-1)S_P[S_F(x_2 - x_1)\hat{A}_\mu(x_1)S_F(x_1 - x_2)\hat{A}_\nu(x_2)]
\end{aligned}$$

有了费曼规则,我们就可以反过

来，先绘出对过程有贡献的费曼图，然后按费曼规则写出相应的 S 矩阵元，图10—8给出(10.6—5)和(10.6—6)所对应的费曼图。

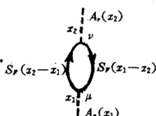


图 10—7

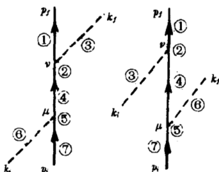


图 10—8

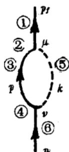


图 10—9

使用费曼图形规则写出 S 矩阵元时，应该注意下面几点：

(1)顺着电子线自上(末态)而下(初态)相应地自左至右书写。

(2)顶角部件中的 $\delta(\sum p_i)$ 函数，是保证能量动量守恒的，因此其中取和是对所有进、出线的所有动量取代数和，可约定进入的四动量为正，射出的四动量为负(或反过来)。

(3)对内线所提供的四动量积分号写在最左边。

(4)写出 S 矩阵元后，可进行适当的整理和化简。

(5)有闭合电子线的，在顺着闭合迴路写完后加括号，然后在括号前加上(—1)S_p(求迹号)。

最后，我们将(10.6—5)和(10.6—6)代入(10.6—4)得到电子 Compton 散射的二级近似矩阵元，对 d^4p 积分之后的结果是：

$$
\langle f|S^{(2)}|i\rangle = ie^2(2\pi)^4\delta(p_i+k_i-p_f-k_f)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}
\{\bar{u}_f\hat{e}_f\frac{i(\hat{p}_i+\hat{k}_i)-m}{(p_i+k_i)^2+m^2}\hat{e}_iu_i+\bar{u}_f\hat{e}_i\frac{i(\hat{p}_i-\hat{k}_f)-m}{(p_i-k_f)^2+m^2}\hat{e}_fu_i\}
\tag{10.6—7}
$$

做为费曼规则的应用，我们再举一个写出电子自能最低次 S 矩阵元的例子。与图10－9相应的 S 矩阵元写成

$$
\begin{aligned}
\langle f|S^{(2)}|i\rangle = & \int \mathrm{d}^4p\int \mathrm{d}^4k \underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_f}}\bar{u}_f}_{①} \\
& \cdot \underbrace{(-e)(2\pi)^4\gamma_\mu\delta(p+k-p_f)}_{②}\underbrace{\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}_f-m}{p_f^2+m^2}}_{③} \\
& \cdot \underbrace{(-e)(2\pi)^4\gamma_\nu\delta(p_i-p-k)}_{④}\underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}}_{⑤}\underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_i}}u_i}_{⑥} \\
= & e^2\int \mathrm{d}^4k\bar{u}_f\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}_i-\hat{k})-m}{(p_i-k)^2+m^2}\gamma_\mu u_i\frac{1}{k^2}\delta(p_i-p_f)
\end{aligned}
\tag{10.6-8}
$$

用类似的讨论步骤，我们可以得到其它相互作用费曼图以及相应的对应规则，这里不再叙述。

第十一章　微扰论的应用

本章讨论协变微扰论的具体应用，举例说明如何计算一些具体的物理过程的微分截面，得到与实验可以比较的结果。

§11.1　跃迁几率与反应截面

1. 跃迁几率

应用 S 矩阵可以计算任何物理过程的跃迁几率及反应截面。在 §10.3 中已讲过，假设在 $t=-\infty$ 时体系处在某一始态 $|i>$，则在 $t=+\infty$ 时体系的终态将是 $S|i>$，而处在其中某一特殊终态 $|f>$ 的几率振幅就等于相应的矩阵元 S_{fi}；因而在 $t=+\infty$ 时处在 $|f>$ 态的几率为

$$W=|S_{fi}|^2=|<f|S|i>|^2 \qquad (11.1-1)$$

在上一节也曾讲过，代表物理过程的费曼图形中每一顶角在 S 阵中贡献一个因子 $\delta(\sum p)$，其中 $\sum p$ 代表在该一顶角处消失粒子的动量 — 能量四矢量的和减去所产生粒子的动量 — 能量四矢量的和；即表示在该顶角处的转化过程中保持动量守恒和能量守恒。当按内粒子线的动量和能量积分后，最后必定得到一个因子

$$\delta(\sum p_i-\sum_f p_f)$$

其中 $\sum\limits_i p_i$ 代表所有始态粒子的动量 — 能量四矢量的和，$\sum p_f$ 代表所有终态粒子的动量 — 能量四矢量的和，而这个因子 $\delta(\sum p_i-\sum\limits_f p_f)$ 反映整个过程的动量守恒和能量守恒，因此可以将 S 矩阵元写作

$$S_{fi}=M_{fi}\delta(\sum_i p_i-\sum_f p_f) \qquad (11.1-2)$$

及

$$W=|S_{fi}|^2=|M_{fi}|^2[\delta(\sum_i p_i-\sum_f p_f)]^2 \qquad (11.1-3)$$

(1) 单位时间单位体积内跃迁至某一终态的几率

上式是没有直接意义的量，因为它代表在无限大的时间和空间内的跃迁几率，而物理上有意义的是单位时间和单位体积内的跃迁几率(当进入的粒子规格化为一单位体积)。为此我们将(11.1－3)式的二个 δ 函数的其中一个表示为四维时、空的积分。

$$\delta(p)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{ipx}$$

这里 $p=\sum_i p_i-\sum_f p_f$。考虑到另一个 δ 函数的存在，可令上式中 $p=0$(按照公式 $\delta^2(p)=\delta(p)\delta(0)$)，因而

$$\delta(0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x=\frac{1}{(2\pi)^4}VT \qquad (11.1-4)$$

于是

$$W=|M_{fi}|^2\delta(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\frac{1}{(2\pi)^4}VT \qquad (11.1-5)$$

这里 $\int d^4x$ 代表总的时间和空间体积，故单位时间和单位体积内的跃迁几率为

$$\omega=\frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta(\sum_i p_i-\sum_f p_f) \qquad (11.1-6)$$

这式给出跃迁至单一个确定的终态的跃迁几率。

(2) 单位时间、单位体积内跃迁至一群连续末态的几率

实际散射中，终态常具有连续谱。因此我们所关心的是终态粒子的动量处在 $\prod_f dp_f$ 范围内任一态的几率，这里 $\prod_f$ 代表对所有终态粒子的连乘，而单位体积内处在动量空间元 $\prod_f dp_f$ 内态的数目可表示为

$$\prod_f \frac{dp}{(2\pi)^3} \qquad (11.1-7)$$

其中 $\frac{1}{(2\pi)^3}$ 是由于从分立 p_f 求和过渡到连续 $\mathrm{d}p_f$ 积分的变换而产生的。(事实上 $(2\pi\hbar)^3 = h^3$ 是每一个态所占的动量空间。我们采用自然单位制 $\hbar = 1, (2\pi\hbar)^3 \to (2\pi)^3$)。于是，单位时间、单位体积内跃迁到动量在 $\prod_f \mathrm{d}p_f$ 区间的几率为

$$d\omega = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta(\sum_i p_i - \sum_f p_f)\prod_f \frac{\mathrm{d}p_f}{(2\pi)^3}$$

(11.1 − 8)

将上式对 $\prod_f \mathrm{d}p_f$ 进行积分，就得到单位时间和单位体积内跃迁到一群连续的终态的跃迁几率

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^4}\int|M_{fi}|^2\delta(\sum_i p_i - \sum_f p_f)\prod_f \frac{\mathrm{d}p_f}{(2\pi)^3}$$

(11.1 − 9)

在上式中，被积分的变量及其积分范围与具体的物理问题有关。

在以上的讨论中我们只对具有确定的自旋态来考虑的，假如在实验中我们不测量自旋，则在(11.1−9)式中还要对始态粒子的自旋求平均和终态粒子的自旋求和。

2. 反应截面

现在我们应用(11.1−9)式来计算碰撞过程中的反应截面，例如光子被自由电子散射(康普顿效应)。为确定起见，我们假设只有二种粒子的情形。如果首先按照终态中第一个粒子的动量 p_{1f} 积分，则可将 δ 函数中动量变量的因子 $\delta(\sum_i p_i - \sum_f p_f)$ 积去，得到

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^7}\int|M_{fi}|^2\delta(\sum_i E_i - \sum_f E_f)\frac{\mathrm{d}p_{2f}}{(2\pi)^3}$$

(11.1 − 10)

其中 $\sum E_i$ 和 $\sum_f E_f$ 各为始态和终态的总能量。如果我们欲计算第二个粒子被散射到立体角元 $d\Omega$ 的跃迁几率，那末我们可将第二个粒子的相空间元 $d\,p_{2f}$ 表达为

$$\mathrm{d}p_{2f} = \rho_f dE\mathrm{d}\Omega$$

其中 $E=\sum_f E_f$。将(11.1－10)式按 dE 积分后，得到跃迁到 dΩ 的几率为

$$\omega=\frac{1}{(2\pi)^{10}}|M_{fi}|^2\rho_E d\Omega \qquad (11.1-11)$$

而散射微分截面 σ 等于电子散射到 $d\Omega$ 的几率 ω 与入射粒子强度 I 的比，即

$$\sigma=\frac{\omega}{I}$$

如果入射粒子的速度为 v(假设第一个粒子的始态为静止)，则 $I=v$，于是微分截面为

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^{10}}|M_{fi}|^2\rho_E\frac{d\Omega}{v} \qquad (11.1-12)$$

§11.2 对自旋(极化)求和与求平均

在实验中，我们一般不测量电子的自旋和光子的极化。即初态粒子不处于极化状态，我们应对初态粒子的极化求平均；而对终态粒子，我们不区分它们的极化，因此应对它们的极化求和。

1. 对电子自旋求和与求平均

在第二章§2.9中，我们已有正能投影算符

$$\Lambda_+=\sum_{r=1}^{2}u^{(r)}(p)\bar{u}^{(r)}(p)=\frac{-i\hat{p}+m}{2m}$$

设 R 是任一矩阵，则对初末态自旋求和

$$\begin{aligned}\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_f Ru_i|^2&=\sum_{s_i,s_f}(\bar{u}_f Ru_i)^+(\bar{u}_f Ru_i)\\&=\sum_{s_i,s_f}\bar{u}_i\gamma_4R^+\gamma_4u_f\bar{u}_f Ru_i\\&=\sum_{s_i,s_f}\bar{u}_{i\alpha}(\gamma_4R^+\gamma_4u_f\bar{u}_f R)_{\alpha\beta}u_{i\beta}\\&=Sp\sum_{s_i,s_f}[u_i\bar{u}_i\gamma_4R^+\gamma_4u_f\bar{u}_f R]\end{aligned} \qquad (11.2-1)$$

利用 Λ_+上式写成

$$\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_f R u_i|^2 = \frac{1}{4m^2}Sp[(-i\hat{p}_i + m)\gamma_4 R^+ \gamma_4(-i\hat{p}_f + m)R]$$

$$= \frac{-1}{4m^2}Sp[(\hat{p} + im)\gamma_4 R^+ \gamma_4(\hat{p} + im)R] \tag{11.2-2}$$

由上两式可见,对自旋求和常常可以不必知道 u 的具体形式,便可得到不含 u 的结果。

如果对初态自旋求平均,对终态自旋求和,则有

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_f R u_i|^2 = \frac{-1}{8m^2}Sp[(\hat{p} + im)\gamma_4 R^+ \gamma_4(\hat{p} + im)R] \tag{11.2-3}$$

2. 对光子极化求和与求平均

设初态光子的四动量为 k,末态光子的四动量为 l,则初、末态光子极化四矢量分别用 $e_\mu^m(k)$ 和 $e_\mu^m(l)$ 表示。根据第七章 §7.2,我们知道光子极化四矢量如有下性质:

定义式:

$$\left.\begin{aligned} e_\mu^1(k) &= [\boldsymbol{n}^{(1)}(k),0] \qquad e_\mu^{(2)} = [\boldsymbol{n}^{(2)},0] \\ e_\mu^3(k) &= [\boldsymbol{n}^{(3)}(k),0] \qquad e_\mu^4(k) = [0,1] = \delta_{\mu 4} \end{aligned}\right\} \tag{11.2-4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{正交性} \qquad e_\mu^m(k)e_\mu^n(k) = \delta_{mn} \\ &\text{封闭性} \qquad e_\mu^m(k)e_\nu^m(k) = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \tag{11.2-5}$$

下面计算中,我们还用到 $\omega_k = |\boldsymbol{k}|$, $\omega_l = |\boldsymbol{l}|$ 和 $k_\mu = (\boldsymbol{k}, i\omega_k)$,用记号 $\boldsymbol{k} = k_\mu - i\omega_k\delta_{\mu 4}$,取 $\boldsymbol{k}$ 沿 $\boldsymbol{n}^3(k)$ 方向,有

$$e_\mu^3(k) = [\frac{\boldsymbol{k}}{\omega_k},0] \tag{11.2-6}$$

光子的极化求和写成

$$\sum_{m=1}^{2}e_\mu^m(k)e_\nu^m(k) = \sum_{m=1}^{4}e_\mu^m(k)e_\nu^m(k) - e_\mu^3(k)e_\nu^3(k) - e_\mu^4(k)e_\nu^4(k)$$

$$= \delta_{\mu\nu} - e_\mu^3(k)e_\nu^3(k) - e_\mu^4(k)e_\nu^4(k) \tag{11.2-7}$$

利用(11.2—6),式,可将上式后面两项分别写成:

$$e_\mu^3(k)e_\nu^3(k) = \frac{1}{\omega_k^2}[k_\mu - i\omega_k\delta_{\mu4}, 0][k_\nu - i\omega_k\delta_{\nu4}, 0]$$

$$= \frac{1}{\omega_k^2}[k_\mu k_\nu - i\omega_k(k_\mu\delta_{\nu4} + k_\nu\delta_{\mu4}) - \omega_k^2\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}]$$

$$e_\mu^4(k)e_\nu^4(k) = \delta_{\mu4}\delta_{\nu4}$$

将它们代入(11.2 — 7)式得

$$\sum_{m=1}^{2} e_\mu^m(k)e_\nu^m(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\omega_k^2}[k_\mu k_\nu - i\omega_k(k_\mu\delta_{\nu4} + k_\nu\delta_{\mu4})]$$

(11.2 — 8)

同理有

$$\sum_{s=1}^{2} e_\mu^s(k)e_\nu^s(l) = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\omega_l^2}[l_\mu l_\nu - i\omega_l(l_\mu\delta_{\nu4} + l_\nu\delta_{\mu4})]$$

(11.2 — 9)

如果实验上不测量光子的极化，就应该对初态的光子(未极化的光子)求平均，对末态的光子求和。由于初末态光子都是横光子，因此，初、末态极化求和

$$\sum_{m=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}[e^m(k)e^s(l)]^2 = \sum_{m,s=1}^{2}[e_\mu^m(k)e_\mu^s(l) \cdot e_\nu^m(k)e_\nu^s(l)]$$

$$= \sum_{m=1}^{2} e_\mu^m(k)e_\nu^m(k)\sum_{s=1}^{2} e_\mu^s(l)e_\nu^s(l)$$

(11.2 — 10)

将(11.2—8)和(11.2—9)代入上式得

$$\sum_{m,s=1}^{2}(e^m(k)e^s(l))^2 = \{\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\omega_k^2}[k_\mu k_\nu - i\omega_k(k_\mu\delta_{\nu4} + k_\nu\delta_{\mu4})]\}$$

$$\cdot\{\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\omega_l^2}[l_\mu l_\nu - i\omega_l(l_\mu\delta_{\nu4} + l_\nu\delta_{\mu4})]\}$$

$$= \delta_{\mu\mu} - \frac{1}{\omega_l^2}[l_\mu l_\mu - i\omega_l(l_4 + l_4)] - \frac{1}{\omega_k^2}[k_\mu k_\mu - i\omega_k(k_4 + k_4)]$$

$$+ \frac{1}{\omega_k^2\omega_l^2}[(k_\mu l_\mu)^2 - 2i\omega_l k_\mu l_\mu k_4 - 2i\omega_k l_\mu k_\mu l_4$$

$$- \omega_l\omega_k(2k_\mu l_\mu + 2k_4 l_4)] \quad (11.2 — 11)$$

注意到 $\delta_{\mu\mu} = 4, k_\mu k_\mu = l_\mu l_\mu = 0$，上式前三项之和等于零。第四项有

$$(k_\mu l_\mu)^2 = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l} - \omega_k\omega_l)^2$$

$$=\omega_k^2\omega_l^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) - 2i\omega_l k_\mu l_\mu k_4$$
$$=\omega_k^2\omega_l^2(2\cos\theta - 2) - 2i\omega_k l_\mu k_\mu l_4$$
$$=\omega_k^2\omega_l^2(2\cos\theta-2) - 2\omega_k\omega_l(k_\mu l_\mu + k_4 l_4)$$
$$=\omega_k^2\omega_l^2(- 2\cos\theta + 4)$$

将这些结果代入(11.2－11)得

$$\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}(e^m(k)e^n(l))^2 = 1 + \cos^2\theta \qquad (11.2-12)$$

其中θ是初末态光子动量方向的夹角。

若考虑到入射的初态光子是非极化的光子，于是还应对初态取平均，其结果是

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}(e^m(k)e^n(l))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \qquad (11.2-13)$$

§11.3 γ矩阵的性质和求迹公式

1. γ 矩阵的一些性质

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_4^2 = \gamma_5^2 = 1 \qquad (11.3-1)$$

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^+ \qquad \gamma_5^+ = \gamma_5 \qquad (11.3-2)$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (11.3-3)$$

其中

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

$$\gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0 \qquad (11.3-4)$$

2. γ 矩阵常用公式

$$[\hat{A},\hat{B}]_+ = 2(A \cdot B) \qquad (11.3-5)$$

$$\hat{A}\hat{A} = (A \cdot A) \qquad (11.3-6)$$

证：$[\hat{A},\hat{B}]_+ = A_\mu B_\nu[\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu] = 2\delta_{\mu\nu}A_\mu B_\nu = 2(A \cdot B)$

令上式中 $\hat{A}=\hat{B}$,即得(11.3 − 6)。

3. **有相同下标的 γ_μ 求和运算**

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\gamma_\nu\\&\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu=4\delta_{\nu\rho}\\&\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\mu=-2\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu\end{aligned}\right\}\qquad(11.3-7)$$

同样有(S 为标量)

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\mu S\gamma_\mu=4S,\quad \gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu=-2\hat{A}\\&\gamma_\mu\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_\mu=4(A_1\cdot A_2),\gamma_\mu\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_\nu=-2\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_1\end{aligned}\right\}\qquad(11.3-8)$$

这几个式可用 γ 矩阵的对易关系证明。

4. **γ 矩阵的求迹公式**

在计算 S 矩阵元时,常牵涉到对 γ 矩阵的求迹运算(如上节中对电子自旋的求和归结为对 γ 矩阵的代数函数求迹的计算)。

(1)*奇数个 γ 矩阵相乘的矩阵迹等于零*

证明:由于求迹号内的矩阵可以按循环次序置换,所以

$$\begin{aligned}Sp(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)&=Sp(\gamma_5^2\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})\\&=Sp(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})\qquad(11.3-9)\end{aligned}$$

由(11.3 − 4)有

$$\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5=(-1)^n\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}$$

取迹得 $\quad Sp(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)=(-1)^nSp(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n})\qquad(11.3-10)$

比较(11.3 − 9)和(11.3 − 10)得

$$S_p(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n})=(-1)^nSp(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n})$$

这表示当 $n=$ 奇数时

$$Sp(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n})=0$$

(2)*偶数个 γ 矩阵的迹*

a. $Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4\delta_{\mu\nu}\qquad(11.3-11)$

证:利用 γ 矩阵的反对易关系(11.3 − 3),则有

$$\begin{aligned}Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu)&=Sp(2\delta_{\mu\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu)\\&=2\delta_{\mu\nu}SpI-Sp(\gamma_\nu\gamma_\mu)=8\delta_{\mu\nu}-Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu)\end{aligned}$$

$\therefore \quad Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}$

b. $Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho) = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho})$ (11.3—12)

证:利用反对易关系(11.3—3)和(11.3—11)

$$\begin{aligned} Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho) &= Sp[(2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\lambda\gamma_\rho] \\ &= 2\delta_{\mu\nu}Sp\gamma_\lambda\gamma_\rho - Sp\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho \\ &= 8\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} - [8\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - Sp\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\rho] \\ &= 8\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} - 8\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + 8\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - Sp\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu \end{aligned}$$

$\because Sp\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu = Sp\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho$

$\therefore Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho) = 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} + 4\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - 4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}$

可见偶数个完全不同的 γ 矩阵乘积之迹为零。

(3)设 A_1, A_2, A_3, A_4 均为四维矢量,用 $\hat{A}_1 = A_{1\mu}\gamma_\mu$,则

$$Sp(\hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2) = 4A_1 \cdot A_2 \qquad (11.3-13)$$

$$\begin{aligned} Sp(\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4) = 4[&(A_1 \cdot A_2)(A_3 \cdot A_4) + (A_1 \cdot A_4)(A_2 \cdot A_3) \\ &- (A_1 \cdot A_3)(A_2 \cdot A_4)] \end{aligned} \qquad (11.3-14)$$

$$\begin{aligned} Sp[(\hat{A}_1 + a_1)(\hat{A}_2 + a_2)] &= Sp[(\gamma_\mu A_{1\mu} + a_1)(\gamma_\nu A_{2\nu} + a_2)] \\ &= 4[A_1 \cdot A_2 + a_1 a_2] \end{aligned} \qquad (11.3-15)$$

$$\begin{aligned} &Sp[(\hat{A}_1 + a_1)(\hat{A}_2 + a_2)(\hat{A}_3 + a_3)(\hat{A}_4 + a_4)] \\ &= 4[(A_1A_2 + a_1a_2)(A_3A_4 + a_3a_4) + (A_1A_4 + a_1a_4)(A_2A_3 + a_2a_3) \\ &- (A_1A_3 - a_1a_3)(A_2A_4 - a_2a_4)] \end{aligned} \qquad (11.3-16)$$

§11.4 Compton 散射

光子和自由电子的散射称为Compton散射。作为微扰论应用的例子,下面计算Compton散射的截面。在这种散射中,初态和末态都只有两个粒子(光子和电子),我们设初态电子是静止的,如图 11—1。在自然单位制中,光子的速度 c=1,由上节可知,微分截面为

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{10}}|M_{if}|^2\rho_E \mathrm{d}\Omega \qquad (11.4-1)$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 代表射出光子方向上的立体角。

令 p 和 k 分别代表电子和光子的

动量一能量四矢量，以下标 i、f 分别代表始态和终态的物理量。

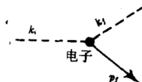


图 11—1

由于假定了始态电子是静止的，故 $p_i=0$，应用动量守恒和能量守恒，我们有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}_i &= \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k}_f \\ m + \omega_i &= E_f + \omega_f = E \end{aligned}\right\} \qquad (11.4-2)$$

其中 m 为电子的静质量(静能)，E_f 为终态电子的能量，ω_i 和 ω_f 各代表始态光子和终态光子的能量，E 代表总能。

1). 我们先求(11.4—1)式中 ρ_E 的表式。可以将终态光子的相空间元 $\mathrm{d}\boldsymbol{k}_f$ 写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{k}_f = \rho_E \mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega = |\boldsymbol{k}_f|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{k}_f|\mathrm{d}\Omega = \omega_f^2 \mathrm{d}\omega_f \mathrm{d}\Omega \qquad (11.4-3)$$

由上式可得

$$\rho_E = \frac{\omega_f^2 \mathrm{d}\omega_f}{\mathrm{d}E} \qquad (11.4-4)$$

为了求 $\mathrm{d}\omega_f/\mathrm{d}E$，我们利用(11.4—2)式可得

$$\begin{aligned} E &= E_f + \omega_f = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f)^2} + \omega_f \\ &= \omega_f + \sqrt{m^2 + \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i\omega_f\cos\theta} \end{aligned} \qquad (11.4-5)$$

其中 θ 为初、末态光子动量 $\boldsymbol{k}_i$ 和 $\boldsymbol{k}_f$ 间的夹角。上式对 ω_f 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega_f} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\omega_f - 2\omega_i\cos\theta}{E_f} = (E - \omega_i\cos\theta)/E_f \qquad (11.4-6)$$

将上式代入(11.4—4)得

$$\rho_E = \frac{E_f\omega_f^2}{E - \omega_i\cos\theta} \qquad (11.4-7)$$

另一方面，(11.4—5)式平方可得

$$E^2 + \omega_f^2 - 2E\omega_f = m^2 + \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i\omega_f\cos\theta \qquad (11.4-8)$$

(11.4—2)式中的第二式平方得

$$E^2 - m^2 - \omega_i^2 = 2m\omega_i \qquad (11.4-9)$$

由(11.4 − 8),(11.4 − 9)两式得

$$E-\omega_i\cos\theta = \frac{m\omega_i}{\omega_f} \qquad (11.4-10)$$

将(11.4 − 10)式代入(11.4 − 7)式得

$$\rho_E = \frac{E_f\omega_f^3}{m\omega_i} \qquad (11.4-11)$$

2). 其次计算 $|M_{fi}|^2$。由(10.6 − 7)式可知,Compton 散射的 M_{fi} 最低次近似表式:

$$M_{fi} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\bar{u}_f(p_f)\{\hat{e}_f\frac{i(\hat{p}_i+\hat{k}_i)-m}{(p_i+k_i)^2+m^2}\hat{e}_i + \hat{e}_i\frac{i(\hat{p}_i-\hat{k}_f)-m}{(p_i-k_f)^2+m_2}\hat{e}_f\}u_i(p_i) \qquad (11.4-12)$$

由动量能量与质量的关系:

$$p_i^2 = p_f^2 = -m^2, k_i^2 = k_f^2 = 0 \text{ 和 } \boldsymbol{p}_i = 0 \qquad (11.4-13)$$

我们有:

$$\left.\begin{aligned}(p_i+k_i)^2+m^2 &= 2p_ik_i = -2m\omega_i\\ (p_i-k_f)^2+m^2 &= -2p_ik_f = 2m\omega_f\end{aligned}\right\} \qquad (11.4-14)$$

此外,利用关系式$[\hat{A},\hat{B}]_+ = 2A\cdot B$,考虑到 $\boldsymbol{p}_i = 0$ 可证 $\hat{e}_i$、$\hat{e}_f$ 与 $\hat{p}_i$ 反对易;由光子极化方向与动量方向正交(极化坐标系),可证 $\hat{e}_i$ 与 $\hat{k}_i$,$\hat{e}_f$ 与 $\hat{k}_f$ 相互反对易。再注意到 e_i,e_f 只有空间分量,则有

$$\left.\begin{aligned}[\hat{e}_i,\hat{p}_i]_+ = 0 \qquad [\hat{e}_i,\hat{k}_i]_+ = 0\\ [\hat{e}_f,\hat{p}_i]_+ = 0 \qquad [\hat{e}_f,\hat{k}_f]_+ = 0\end{aligned}\right\} \qquad (11.4-15)$$

证:

$$[\hat{e}_i,\hat{p}_i]_+ = 2e_i\cdot p_i = 2(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_i + e_{i4}p_{i4}) = 0$$

$$[\hat{e}_f,\hat{p}_i]_+ = 2e_f\cdot p_i = 0$$

$$[\hat{e}_i,\hat{k}_i]_+ = 2e_i\cdot k_i = 2(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{k}_i + e_{i4}k_{i4}) = 0$$

$$[\hat{e}_f,\hat{k}_f]_+ = 2e_f\cdot k_f = 0$$

将(11.4 − 14)和(11.4 − 15)代入(11.4 − 12)得

$$M_{fi} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}}\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\bar{u}_f\{\omega_f\hat{e}_f\hat{e}_i[i(\hat{p}_i+\hat{k}_i)+m] - \omega_i\hat{e}_i\hat{e}_f[i(\hat{p}_i-\hat{k}_f)]+m\}u_i$$

注意到$(i\hat{p}_i + m)u_i = 0$ 有

$$M_{fi} = \frac{e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}} \frac{m}{\sqrt{E_iE_f}} \bar{u}_f R u_i \qquad (11.4-16)$$

其中 $R = \omega_f \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i + \omega_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f$ (11.4 − 17)

Compton 散射微分截面，由(11.4 − 1)有(用 $E_i = m$)

$$\sigma' = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{fi}|^2 \rho_E \mathrm{d}\Omega$$

$$= (\frac{e^2}{4\pi})^2 \frac{1}{4m^2\omega_i^4} |\bar{u}_f R u_i|^2 \mathrm{d}\Omega \qquad (11.4-18)$$

3). 将上式对初态电子自旋求平均，对末态电子自旋求和后，所得到的微分截面

$$\sigma = (\frac{e^2}{4\pi})^2 \frac{1}{4m^2\omega_i^4} \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f R u_i|^2 \mathrm{d}\Omega \qquad (11.4-19)$$

将(11.2−3)代入上式得

$$\sigma = (\frac{e^2}{4\pi})^2 \frac{1}{32m^4\omega_i^4} (-1) Sp[(\hat{p} + im)\gamma_4 R^+ \gamma_4 (\hat{p} + im) R]$$

$$= (\frac{e^2}{4\pi})^2 \frac{1}{32m^4\omega_i^4} Sp[(\hat{p} + im)\overline{R}(\hat{p} + im) R]$$

$$= (\frac{e^2}{4\pi})^2 \frac{1}{32m^4\omega_i^4} A \qquad (11.4-20)$$

其中 $\overline{R} = -\gamma_4 R^+ \gamma_4 = \omega_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \omega_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i$ (11.4−21)

$$A = Sp[(\hat{p}_i + im)\overline{R}(\hat{p}_f + im)] \qquad (11.4-22)$$

上面计算 R 的第二个等号时用了四矢量的下列性质：

$$\hat{k}^+ \gamma_4 = (\gamma_j k_j^* + \gamma_4 k_4^*)\gamma_4 = -\gamma_4 \hat{k}$$

$$\hat{e}^+ \gamma_4 = -\gamma_4 \hat{e}$$

4). 矩阵迹 A 的计算

由 $\hat{p}_f = \hat{p}_i + \hat{k}_i - \hat{k}_f$ 和奇数个 γ 矩阵迹等于零，

$$A = Sp[(\hat{p}_i + im)\overline{R}(\hat{p}_f + im) R]$$

$$= Sp[(\hat{p}_i + im)\overline{R}(\hat{p}_i + \hat{k}_i - \hat{k}_f + im) R]$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 \qquad (11.4-23)$$

$$A_1 = Sp(\hat{p}_i \overline{R} \hat{p}_i R - m^2 \overline{R} R)$$

$$A_2 = Sp(\hat{p}_i \overline{R} \hat{k}_i R)$$

$$A_3 = - Sp(\hat{p}_i \bar{R} \hat{k}_f R) \qquad (11.4-24)$$

(a) A_1的计算

用 $p_i^2 = p_f^2 = -m, k_i^2 = k_f^2 = 0, \hat{B}\hat{B} = B \cdot B$ 和由(11.4－15)有 $(e_i p_i) = (e_f p_i) = 0$ 等关系式可计算 A_1。

$$[\hat{p}_i, R]_+ = [\hat{p}_i, (\omega_f \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i + \omega_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f)]_+$$
$$= [\hat{p}_i, \omega_f \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i]_+ + [\hat{p}_i, \omega_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f]_+$$

其中
$$[\hat{p}_i, \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i]_+ = \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i + \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i \hat{p}_i$$
$$= -(\hat{e}_f \hat{p}_i \hat{k}_i \hat{e}_i + \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{p}_i \hat{e}_i)$$
$$= -\hat{e}_f [\hat{p}_i, \hat{k}_i]_+ \hat{e}_i = 2m\omega_i \omega_f \hat{e}_f \hat{e}_i$$
$$[\hat{p}_i, \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f]_+ = -\hat{e}_i [\hat{p}_i, \hat{k}_f]_+ \hat{e}_f = 2m\omega_i \omega_f \hat{e}_i \hat{e}_f$$

所以 $[\hat{p}_i, R]_+ = 2m\omega_i \omega_f [\hat{e}_i, \hat{e}_f]_+ = 4m\omega_i \omega_f (e_i e_f)$ (11.4－25)

同理 $[\hat{p}_i, \bar{R}]_+ = 4m\omega_i \omega_f (e_i e_f)$ (11.4－26)

由上两式和 $\hat{p}_i^2 = p_i^2 = -m$，可得

$$A_1 = 4m\omega_i \omega_f (e_i e_f) Sp(\hat{p}_i R)$$

$$Sp\hat{p}_i R = \frac{1}{2} Sp[\hat{p}_i R + R\hat{p}_i] = \frac{1}{2} Sp[\hat{p}_i, R]_+$$
$$= \frac{1}{2} 4m\omega_i \omega_f (e_i e_f) SpI = 8m\omega_i \omega_f (e_i e_f)$$

所以 $$A_1 = 32m^2 \omega_i^2 \omega_f^2 (e_i e_f)^2 \qquad (11.4-27)$$

(b) A_2、A_3的计算

$$A_2 = Sp\hat{p}_i \bar{R} \hat{k}_i R = Sp\omega_f^2 \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f$$
$$+ Sp\omega_f^2 \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i + Sp\omega_i \omega_f \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f$$
$$+ Sp\omega_i \omega_f \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i$$

用 $\hat{A}\hat{A} = A \cdot A$ 和反对易关系 $[\hat{e}_i, \hat{k}_i]_+ = [\hat{e}_f, \hat{k}_f]_+ = [\hat{p}_i, \hat{e}_f]_+ = [\hat{p}_i, \hat{e}_i]_+ = 0$，及迹 $SpABC = SpCAB$ 可简化上式。

$$\text{第一项} = Sp\hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_i \hat{k}_f \hat{e}_f = \omega_i^2 Sp\hat{p}_i \hat{k}_f \hat{k}_i \hat{k}_f$$
$$= \omega_i^2 4[(p_i k_f)(k_i k_f) + (p_i k_f)(k_f k_i) - (p_i k_i) k_f^2]$$
$$= 8\omega_i^2 (p_i k_f)(k_i k_f) = -8\omega_i^2 m\omega_f (k_i k_f)$$

$$\text{第二项} = Sp\omega_f^2 \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i \hat{e}_i = -2\omega_f^2 (e_f k_i) Sp\, \hat{p}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{k}_i$$
$$= -16\omega_f^2 (p_i k_i)(e_f k_i)^2 = 16m\omega_i \omega_f^2 (e_f k_i)^2$$

$$第三项 = Sp\omega_i\omega_f\hat{p}\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i = 2\omega_i\omega_f(k_ie_f)Sp\hat{p}\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i$$

$$= 8\omega_i\omega_f(k_ie_f)^2(p_ik_f) = -8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2$$

$$第四项 = Sp\omega_i\omega_f\hat{p}\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f = -2\omega_i\omega_f(e_fk_i)Sp\hat{p}\hat{k}_i\hat{k}_f\hat{e}_f$$

$$= 8\omega_i\omega_f(e_fk_i)^2(p_ik_f) = -8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2$$

故有
$$A_2 = -8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f) \qquad (11.4-28)$$

我们可以用类比方法求得 A_3。注意到

$$A_2 = Sp\hat{p}\hat{p}_iR\hat{k}_iR, \qquad A_3 = -Sp\hat{p}\hat{p}_i\overline{R}\hat{k}_fR$$

$$R = \omega_f\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i + \omega_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f, \qquad \overline{R} = \omega_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f + \omega_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i$$

不难看出，假使将 $\hat{k}_i$ 和 $\hat{k}_f$ 互换，$\hat{e}_i$ 和 $\hat{e}_f$ 互换，那末 R 仍然是 R，$\overline{R}$ 仍然是 $\overline{R}$，而 A_2 则变为 $-A_3$。因此，假使将(11.4－28)式右方的算符 i 和 f 互换，就得到 $-A_3$。故

$$A_3 = 8m\omega_i\omega_f^2(k_ik_f) \qquad (11.4-29)$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 8m\omega_i\omega_f[4m\omega_i\omega_f(e_ie_f)^2 + (\omega_f - \omega_i)(k_ik_f)] \qquad (11.4-30)$$

式中
$$(k_ik_f) = \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_f - \omega_i\omega_f = \omega_i\omega_f(\cos\theta - 1)$$

由 (11.4－10)
$$E - \omega_i\cos\theta = \frac{m\omega_i}{\omega_f}, \quad E = \omega_i + m$$

有
$$\omega_i\omega_f(\cos\theta - 1) = m(\omega_f - \omega_i)$$

于是
$$(k_ik_f) = m(\omega_f - \omega_i) \qquad (11.4-31)$$

将上式代入(11.4－30)得到

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 8m^2\omega_i^2\omega_f^2[4(e_ie_f)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2] \qquad (11.4-32)$$

将 A 代入(11.4－20)得对初态电子自旋求平均后的 Compton 散射微分截面

$$\sigma = (\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{1}{4m^2\omega_i^2}\omega_f^2[4(e_ie_f)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2]\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{r_0^2}{4}(\frac{\omega_f}{\omega_i})^2[4(e_ie_f)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2]\mathrm{d}\Omega \qquad (11.4-33)$$

其中 $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi m}$是电子的经典半径。

5). 如果不区分光子的极化，我们还要对初态光子的极化求平均，对末态光子的极化求和。(11.2－12)式求和与求平均得

$$\frac{1}{2}\sum_{e_i,e_f}(e_ie_f)^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad (11.4-34)$$

最后，我们得到：对初态光子极化(以及电子自旋)求平均，对末态光子极化(以及电子自旋)求和后，Compton 散射微分截面：

$$\bar{\sigma}=\frac{r_0}{2}(\frac{\omega_f}{\omega_i})^2(\cos^2\theta+\frac{\omega_f}{\omega_i}+\frac{\omega_i}{\omega_f}-1)\mathrm{d}\Omega \quad (11.4-35)$$

§11.5 正、负电子湮没

现代物理实验已经证实，高能正、负电子碰撞时，湮没转化为一对光子。在这一节，我们计算这种反应的微分截面。以 p_1 和 p_2 分别代表电子和正电子的四动量，以 k_1、k_2 分别代表所产生的二个光子的四动量。这个过程的最低次近似如图11－2所示。



图 11－2

我们按照费曼图形规则写出相应于这两个图形的 S 矩阵元

$$<f|S^{(2)}|i>=M_{fi}\delta(p_1+p_2-k_1-k_2) \qquad (11.5-1)$$

$$M_{fi}=\frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\frac{m}{\sqrt{E_1E_2}}\bar{v}_s(p_2)\{\hat{e}_2\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k}_1)-m}{(p_1-k_1)^2+m^2}\hat{e}_1$$

$$+\hat{e}_1\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m}{(p_1-k_2)^2+m^2}\hat{e}_2\}u_r(p_1) \qquad (11.5-2)$$

其中 E_1、E_2 分别代表电子、正电子的能量，ω_1、ω_2 和 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$ 分别代表末态两个光子的能量和极化矢量。设初态电子静止，$\boldsymbol{p}_1=0$，$E_1=m$，则类似上节(11.4－13)和(11.4－15)式，有：

$$p_1^2=p_2^2=-m^2 \qquad k_1^2=k_2^2=0 \qquad (11.5-3)$$

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{e}_1,\hat{p}_1]_+=[\hat{e}_2,\hat{p}_1]_+=0\\&[\hat{e}_1,\hat{k}_1]_+=[\hat{e}_2,\hat{k}_2]_+=0\end{aligned}\right\} \qquad (11.5-4)$$

利用上两式，仿上节方法，我们可得到类似(11.4—16)的表示式

$$M_{fi}=\frac{e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_1\omega_2)^{3/2}}\frac{m}{\sqrt{E_1E_2}}\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)$$

$$=\frac{e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_1\omega_2)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_2}}\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1) \qquad (11.5-5)$$

最后一步，用了 $E_1=m$，并且其中

$$R=\omega_2\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1+\omega_1\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2 \qquad (11.5-6)$$

由于终态只有两个粒子，由(11.1—12)式，反应微分截面

$$\sigma'=\frac{1}{(2\pi)^{10}}|M_{fi}|^2\rho_E\frac{\mathrm{d}\Omega}{v}$$

$$=\left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2\frac{m}{4\omega_1^3\omega_2^3E_2}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2\frac{\rho_E\mathrm{d}\Omega}{v}$$

实验上，如果不测电子、正电子的自旋，我们应对它们的自旋求平均，则微分截面写成

$$\sigma=\frac{r_0^2m}{16\omega_1^3\omega_2^3E_2}\sum_{s,r}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2\frac{\rho_E}{v}\mathrm{d}\Omega \qquad (11.5-7)$$

其中 $v=\frac{|p_2|}{E_2}$ 是入射正电子的速度，$r_0=\left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)$是电子经典半径。

下面我们求 ρ_E 的表式，由能动量守恒

$$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 \qquad m+E_2=\omega_1+\omega_2 \qquad (11.5-8)$$

于是总能量

$$E=\omega_1+\omega_2=\omega_1+|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k}_1| \qquad (11.5-9)$$

由上式有

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\omega_2}(E-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta') \qquad (11.5-10)$$

其中 θ' 是正电子动量 $\boldsymbol{p}_2$与第一个光子动量 $\boldsymbol{k}_1$的夹角.利用

$$\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1=\omega_1^2\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\Omega=\rho_E\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega \qquad (11.5-11)$$

联合上两式，可得

$$\rho_E=\frac{\omega_1^2\omega_2}{E-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta'} \qquad (11.5-12)$$

注意到 $\omega_2=(E-\omega_1)$ 和 $\omega_2=|\boldsymbol{k}_2|=|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k}_1|$， 取两式右边平

方得

$$E^2-\omega_1^2-2E\omega_1=\omega_1^2+|\boldsymbol{p}_2|^2-2|\boldsymbol{p}_2|\omega_1\cos\theta'$$

另外
$$E^2=(E_1+E_2)^2=2m^2+2mE_2+|\boldsymbol{p}_2|^2$$
联合两式有
$$mE=\omega_1(E-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta')$$

将上式代入(11.5—12)得

$$\rho_E=\frac{\omega_1^3\omega_2}{mE} \qquad (11.5-13)$$

下面，我们计算$\sum_{r,s}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2$。其中$\sum_{r,s}$是对电子、正电子自旋求和。利用(11.2－1)，其中$\bar{u}_f\to\bar{v}_s$，可得

$$\sum_{r,s}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2=Sp\sum_{s,r}[u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)\gamma_4R^+\gamma_4v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)R]$$

利用正、负能投影算符(2.9—15)式

$$\Lambda_+=\sum_r u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)=\frac{-i\hat{p}_1+m}{2m},$$

$$\Lambda_-=-\sum_s v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)=\frac{i\hat{p}+m}{2m} \qquad (11.5-14)$$

则

$$\sum_{r,s}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2=\frac{1}{4m^2}Sp(\hat{p}_1+im)\overline{R}(\hat{p}_2-im)R \qquad (11.5-15)$$

其中
$$\overline{R}=-\gamma_4R^+\gamma_4 \qquad (11.5-16)$$

将(11.5—15)中求迹展开(注意奇数γ矩阵的迹等零)

$$Sp(\hat{p}_1+im)\overline{R}(\hat{p}_2-im)R=Sp[(\hat{p}_1+im)\overline{R}(\hat{k}_1+\hat{k}_2-\hat{p}_1-im)R]$$
$$=-[Sp(\hat{p}_1\overline{R}\hat{p}_1R)-m^2\overline{R}R]+Sp(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_1R)+S_p(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_2R)$$

将上式与(11.4—23)对比可知，当下标$i\to1, f=2$时，两者形式类似，即

$$\left.\begin{aligned}
&-Sp(\hat{p}_1Rp_1R-m^2\overline{R}R)=-A_1=-32m^2\omega_1^2\omega_2^2(e_1e_2)^2\\
&Sp(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_1R)=A_2=-8m\omega_1^2\omega_2(k_1k_2)\\
&Sp(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_2R)=-A_3=-8m\omega_1\omega_2^2(k_1k_2)
\end{aligned}\right\} \qquad (11.5-17)$$

所以

$$Sp(\hat{p}_1 + im)\bar{R}(\hat{p}_2 - im)R = -8m\omega_1\omega_2[4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2 + E(k_1k_2)] \tag{11.5-18}$$

将上式代入(11.5—15)得

$$\sum_{r,s}|\bar{v}_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2 = \frac{-2}{m}\omega_1\omega_2[4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2 + E(k_1k_2)] \tag{11.5-19}$$

将(11.5—13)和(11.5—19)式以及 $v = \frac{E_2}{|p_2|}$代入(11.5—7),得到

$$\sigma = \frac{r_0^2\omega_1 d\Omega}{8\omega_2 mE|p_2|}[-E(k_1k_2) - 4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2] \tag{11.5-20}$$

用$(e_1e_2) = \cos\varphi$(φ是 e_1、e_2 间夹角)和$(k_1k_2) = \omega_1\omega_2(\cos\theta - 1)$($\theta$是 k_1 和 k_2间夹角)代入上式得

$$\sigma = \frac{r_0^2\omega_1^2 d\Omega}{8mE|p_2|}[E(1-\cos\theta) - 4m\cos^2\varphi] \tag{11.5-21}$$

如果我们不测光子的极化方向,应将(11.5—20)对 e_1、e_2极化求和,利用极化求和公式(11.2—12),有

$$\sum_{e_1,e_2}[4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2 + E(k_1k_2)]$$
$$= 4E(k_1\ k_2) + 4m\omega_1\omega_2(1+\cos^2\theta) \tag{11.5-22}$$

得到

$$\bar{\sigma} = \frac{r_0^2\omega_1^2 d\Omega}{2mE|p_2|}[E(1-\cos\theta) - m(1+\cos^2\theta)] \tag{11.5-23}$$

将上式对立体角 dΩ 积分,我们便得到 e e^+湮没的总截面

$$\bar{\sigma}_{总} = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2 - 1}\{\frac{1+4\gamma+\gamma^2}{1+\gamma}\ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{3+\gamma}{1+\gamma}\sqrt{\gamma^2-1})\}$$

其中 $\gamma = \frac{E_2}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, v是入射正电子的速度。Dirac 在 1930年首先推出这一公式。

§11.6 轫致辐射

1. **外场问题**

在实验物理中，经典场往往也参加相互作用，如库仑散射中的静电场和同步加速器中的静磁场以及核散射问题中的静介子场等，这些非量子化的经典场称为外场。所谓外场，也就是相互作用对场源状态的影响可以忽略的场，因而，它可以认为是一个预先给定的时空函数(不是算符)。

电子在库仑场中被散射时由于速度的改变而产生辐射的现象称为轫致辐射。在处理这样的问题时，有必要把以前的理论略加扩充，这时电子受到外磁场 $A_\mu^{外}(x)$ 和辐射场 $A_\mu(x)$ 的作用，设以 $A_\mu^{总}(x)$代表外电磁场和幅射场的总和

$$A_\mu^{总} = A_\mu + A_\mu^{外}$$

则总电磁场与电子场的相互作用哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i = -ieN(\bar{\psi}\hat{A}^{总}\psi) = -ieN\{\bar{\psi}(\hat{A} + \hat{A}^{外})\psi\} \tag{11.6-1}$$

将其代入 S 矩阵的展式中，就反映了包括外电磁场的作用。象以前一样，我们将电子场 ψ 和幅射场 A 用量子化场来处理，即它们可以用产生和消灭算符来表示；但对外电磁场则不同，我们仍然把 $A_\mu^{外}(x)$看作是四维时空坐标的函数。在动量表象中，$A_\mu^{外}(k)$可表示为

$$A_\mu^{外}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int A_\mu^{外}(x)e^{-ikx}\mathrm{d}^4x \tag{11.6-2}$$

对于库仑场，三维矢势 $\boldsymbol{A}^{外}(x) = 0$，而标势 $\varphi^{外}(x)$可表达为：

$$A_4^{外}(x) = i\varphi^{外}(x) = -i\frac{Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{11.6-3}$$

这量 $-Ze$ 是产生库仑场的电荷；例如连续谱的 X 射线即属于这种情形，而 Z 即为靶核的原子序数。由(11.6-2)、(11.6-3)两式可得

$$A_4^{外}(k') = \frac{-iZe}{(2\pi)^3|\boldsymbol{k}|^2}\delta(k'_0) \qquad (11.6-4)$$

上式证明如下：将(11.6—3)代入(11.6—2)

$$A_4(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int A_4^{外}(x)e^{-ikx}\mathrm{d}^4x = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{-iZe}{4\pi|x|}e^{-ikx}\mathrm{d}^4x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\, \frac{-iZe}{4\pi|x|}e^{-ik\cdot x}\delta(k_0)$$

$$= \frac{-iZe}{(2\pi)^3 4\pi}\delta(k_0)\int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{|x|}e^{-ik\cdot x}$$

其中

$$\int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{|x|}e^{-ik\cdot x} = \int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{r}\, e^{-ik\cdot x} = \lim_{\eta\to 0}\int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{r}e^{-ik\cdot x-\eta r}$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int e^{-ikr\cos\theta-\eta r}r\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \lim_{\eta\to 0}2\pi\int \mathrm{d}re^{-\eta r}\frac{1}{i|\boldsymbol{k}|}e^{-i|\boldsymbol{k}|r\cos\theta}\Big|_0^\pi$$

$$= \lim_{\eta\to 0}2\pi\int \mathrm{d}re^{-\eta r}\frac{1}{i|\boldsymbol{k}|}(e^{i|\boldsymbol{k}|r} - e^{-i|\boldsymbol{k}|r})$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2+\eta^2} = \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2}$$

将上式代入前式，(11.6—4)式得证。

2. S 矩阵元

描写轫致辐射最低次近似的费曼图如图11—3所示。代表外电磁场的虚线在其端点用记号⊕标明，在动量表象中它对 S 矩阵元贡献一个因子 $\int A^{外}(k)\mathrm{d}^4k$。相应于图 11 — 3 的 S 矩阵元是

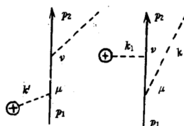


图 11—3

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{\sqrt{2w}}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4k'$$

$$\bar{u}_2\{\hat{e}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\hat{A}^{外}(k')\delta(p-k'-p_1)\delta(p_2+k-p)$$
$$+\hat{A}^{外}(k')\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\hat{e}\delta(p+k-p_1)\delta(p_2-p-k')\}u_1$$

(11.6 − 5)

其中 $p_1(\boldsymbol{p}_1,E_1)$ 及 $p_2(\boldsymbol{p}_2,E_2)$ 代表始态及终态电子的动量能量四矢量，而 $k(\boldsymbol{k},w)$ 代表辐射出光子的动量能量四矢量。以(11.6 − 4)式的 $A_4^{外}(k')$，代入(11.6 − 5)式中的 $A^{外}(k')$，并顺序对 $d^4pd^3kdk_o$ 积分，则 S 矩阵元可写为

$$s_{fi}^{(2)}=\frac{2\pi Ze^3}{\sqrt{2w}}\frac{\delta(E_2+w-E_1)}{|\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1|^2}\frac{m}{\sqrt{E_1E_2}}\cdot\bar{u}_2\{\hat{e}\frac{i(\hat{p}_2+\hat{k})-m}{(p_2+k)^2+m^2}\gamma_4$$
$$+\gamma_4\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\hat{e}\}u_1 \quad (11.6-6)$$

3. 微分截面

(1)不考虑自旋，对电子初态求平均，末态求和，则单位体积单位时间内电子跃迁至某一末态的几率

$$w'=\frac{1}{VT}\frac{1}{2}\sum_{s_i s_f}|s_{fi}^{(2)}|^2$$
$$=\frac{1}{VT}\cdot\frac{1}{2}\frac{(2\pi Ze)^2}{2\omega}\frac{\delta^2(E_2+\omega-E_1)}{|\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1|^4}\frac{m^2}{E_1E_2}\cdot\sum_{s_i,s_f}|\bar{u}_2Mu_1|^2$$

考虑到

$$\delta^2(E_2+\omega-E_1)=\delta(E_2+\omega-E_1)\delta(0)=\delta(E_2+\omega-E_1)\frac{VT}{2\pi}$$

$$w'=\sum_{s_i,s_f}\frac{2\pi Z^2e^6m^2}{4\omega E_1E_2}\frac{\delta(E_2+\omega-E_1)}{|\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{P}_1|^4}|\bar{u}_2Mu_1|^2$$

其中 $$M=\hat{e}\frac{i(\hat{p}_2+\hat{k})-m}{(p_2+k)^2+m}\gamma_4+\gamma_4\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\hat{e}$$

(11.6 − 7)

末态电子动量在 $d\boldsymbol{p}_2$ 范围内的连续末态(辐射光子动量任意值)的跃迁几率

$$w = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}w'$$

$$= \frac{Z^2 e^6 m^2}{4\omega(2\pi)^5 E_1 E_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \frac{\delta(E_2 + \omega - E_1)}{|\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1|^4}\sum_{s_1, s_2} |\bar{u}_2 M u_1|^2$$

(11.6 − 8)

在(11.6−8)式右端不包含因子 $\delta(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1)$ 是这式的一个特点，原因是库仑场可吸收一部分动量，使得终态电子和光子的总动量不一定等于始态电子的动量。设 $\mathrm{d}\Omega_\gamma$ 和 $\mathrm{d}\Omega_e$ 各为终态光子和终态电子 射出方向的立体角，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 = |\boldsymbol{p}_2|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{p}_2|\mathrm{d}\Omega_e$$

由 $E_2^2 = |\boldsymbol{p}_2|^2 + m^2$ 有 $E_2 \mathrm{d}E_2 = |\boldsymbol{p}_2|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_2|$

所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 = |\boldsymbol{p}_2| E_2 \mathrm{d}E_2 \mathrm{d}\Omega_e$

另有 $\mathrm{d}\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{k}|\mathrm{d}\Omega_\gamma = \omega^2 \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega_\gamma$

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\delta(E_2 + \omega - E_1) = \omega^2 \mathrm{d}\Omega_\gamma \qquad (11.6-10)$$

设入射电子的速度为 v_1，则

$$I = v_1 = |\boldsymbol{p}_1|/E_1$$

将 I 和(11.6−10)代入(11.6−8)则轫致幅射的微分截面

$$\sigma = \frac{w}{I} = \frac{w}{v_1}$$

$$= \frac{Z^2 \alpha^3 \omega m^2}{2\pi^2 |\boldsymbol{k}'|^4}\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}\mathrm{d}E_2 \mathrm{d}\Omega_e \mathrm{d}\Omega_\gamma \sum_{s_1, s_2} |\bar{u}_2(p_2) M u_1(p_1)|^2$$

(11.6 − 11)

其中 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$， $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1$

下面我们计算上式右方因子

$$\mathscr{M} = \sum_{s_1, s_2} |\bar{u}_2(p_2) M u_1(p_1)|^2 \qquad (11.6-12)$$

为书写简便，引进记号

$$D_1 = -\frac{1}{(p_1 - k)^2 + m^2} = \frac{1}{2p_1 k}$$
$$D_2 = \frac{1}{(p_2 + k)^2 + m^2} = \frac{1}{2p_2 k} \qquad (11.6-13)$$

适当交换(11.6—7)中 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$ 和 $\hat{e}$ 的位置，并利用

$$(i\hat{p}_1 + m)u_1 = 0, \bar{u}_2(i\hat{p}_2 + m) = 0 \text{ 和} [\hat{p}, \hat{e}]_+ = 2(pe)$$

可得

$$\bar{u}_2(p_2)Mu_1(p_1) = i\bar{u}_2(p_2)(a + b)u_1(p_1) \quad (11.6-14)$$

其中

$$a = D_2(\hat{e}\hat{k} + 2(ep_2)\gamma_4)$$
$$b = D_1\gamma_4(\hat{k}\hat{e} - 2(ep_1)) \qquad (11.6-15)$$

将(11.6—14)代入(11.6—12)并利用(2.9—15)得

$$\mathscr{M} = \frac{1}{4m^2}Sp(\bar{a} + \bar{b})(-i\hat{p}_2 + m)(a + b)(-i\hat{p}_1 + m)$$

$$(11.6-16)$$

其中

$$\bar{a} = \gamma_4 a^+ \gamma_4 = D_2\gamma_4(\hat{k}\hat{e} + 2(ep_2))$$
$$\bar{b} = \gamma_4 b^+ \gamma_4 = D_1(\hat{e}\hat{k} - 2(ep_1))\gamma_4 \qquad (11.6-17)$$

将(11.6—16)右边矩阵迹分解成四项

$$Sp(\bar{a} + \bar{b})(-i\hat{p}_2 + m)(a + b)(-i\hat{p}_1 + m)$$
$$= B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

其中

$$B_1 = Sp\bar{a}(-i\hat{p}_2 + m)a(-i\hat{p}_1 + m)$$
$$B_2 = Sp\bar{b}(-i\hat{p}_2 + m)b(-i\hat{p}_1 + m)$$
$$B_3 = Sp\bar{a}(-i\hat{p}_2 + m)b(-i\hat{p}_1 + m)$$
$$B_4 = Sp\,\bar{b}(-i\hat{p}_2 + m)a(-i\hat{p}_1 + m) \qquad (11.6-18)$$

a. B_1的计算　由奇数个 γ 矩阵的迹为零，有

$$B_1 = Sp[-\bar{a}\hat{p}_2 a\hat{p}_1 + m^2\bar{a}a] \qquad (11.6-19)$$

利用

$$\gamma_4\hat{p} = -\hat{p} + \gamma_4 \qquad (11.6-20)$$

有：

$$-Sp\bar{a}\hat{p}_2 a\hat{p}_1 = D_2^2 Sp(\hat{k}\hat{e} + 2(ep_2))\hat{p}_2(\hat{e}\hat{k} + 2(ep_2))\hat{p}_1 +$$

$$=D_2^2 Sp[\hat{k}\hat{e}\hat{p}_2\hat{e}\hat{k}\hat{p}_1^+ + 4(ep_2)^2\hat{p}_2\hat{p}_1^+$$
$$+ 2(ep_2)\hat{p}_2\hat{e}\hat{k}\hat{p}_1^+ + 2(ep_2)\hat{k}\hat{e}\hat{p}_2\hat{p}_1^+]$$
$$=D_2^2 Sp[-2(kp_1^*)(kp_2) + 4(ep_2)^2(p_2p_1^*)$$
$$+ 4(ep_2)^2(kp_1^*) - 4(ep_2)(ep_1^*)(kp_2)\}$$
$$=8D_2^2\{2(ep_2)^2(k+p_2,p_1^*) - (kp_2)[(kp_1^*$$
$$+ 2(ep_2)(ep_1^*)]\} \qquad (11.6-21)$$

其中利用了

$$\left.\begin{aligned} &\hat{k}\hat{k}=0, \quad \hat{e}\hat{e}=1 \quad \hat{e}\hat{k}=-\hat{k}\hat{e} \\ &Sp\hat{c}_1\hat{c}_2\hat{c}_3\hat{c}_4 = 2[(c_1c_2)(c_3c_4) - (c_1c_3)(c_2c_4) \\ &\qquad + (c_1c_4)(c_2c_3)] \end{aligned}\right\} \qquad (11.6-22)$$

另外，$\quad m^2 Sp\bar{a}a = 16D_2^2 m^2(ep_2)^2 \qquad (11.6-23)$

将上两式代入(11.6—19)得到

$$B_1 = 8D_2^2\{2(ep_2)^2[m^2 + (k+p_1,p_1^*)] - (kp_2)[(kp_1^*) + 2(ep_2)(ep_1^*)]\} \qquad (11.6-24)$$

b. B_2的计算　由(11.6—18)可见，如果作变换：

则

$$\left.\begin{aligned} &D_2 \to D_1, \quad m \to -m, \quad p_1 \rightleftarrows p_2, \\ &\bar{a} \to b, \quad a \to \bar{b}, \quad B_1 \to B_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11.6-25)$$

从(11.6—24)和(11.6—25)有

$$B_2 = 8D_1^2\{2(ep_1)^2[m^2 + (p_1 - k, p_2^*)] - (kp_1)[(kp_2^*) - 2(ep_1)(ep_2^*)]\} \qquad (11.6-26)$$

c. B_3的计算

利用(11.6—20)、(11.6—22)和(11.6—18)可以得到

$$B_3 = 4D_1D_2\{2(ep_1^*)(ep_2)[(k,k'^*) - 2(p_2p_1^*) - 2m^2] + 2(ep_1^*)(ep_1)(kp_2) - 2(ep_2)^2(kp_1) + (kp_1)(kp_2) + (k^*p_2)(kp_1^*) - (kk^*)[(p_2p_1^+) + m^2]\}$$
$$(11.6-27)$$

因为 B_3是实数，故有

$$B_3 = B_3^* = Sp(i\hat{p}_1^+ + m)b^+(i\hat{p}_2^+ + m)\bar{a}^+ \qquad (11.6-28)$$

以 γ_4 右乘上式右方，再利用(11.6－17)和(11.6－20)，可以得到

$$B_3 = Sp(-i\hat{p}_1 + m)\bar{b}(-i\hat{p}_2 + m)a = B_4 \tag{11.6 - 29}$$

于是 $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$

$$\begin{aligned}
&= 2\Big\{\frac{2(ep_1)^2}{(kp_1)^2}[m^2 + (p_1 - k, p_2^*) + (kp_1)] \\
&+ \frac{2(ep_2)^2}{(kp_2)^2}[m^2 + (p_2 + k, p_1^*) - (kp_2)] \\
&+ \frac{2(ep_1)(ep_2)}{(kp_1)(kp_2)}[(kp_2) - (kp_1) + (k, k'^*) - 2(p_2 p_1^*) - 2m^2] \\
&+ \frac{1}{(kp_1)(kp_2)}[(kp_1)(kp_2) + (k^* p_2)(kp_1^*) - (kp_1)(kp_1^*) \\
&- (kp_2)(kp_2^*) - (p_2 p_1^*)(kk^*) - m^2(kk^*)]\Big\}
\end{aligned} \tag{11.6 - 30}$$

可以证明，上式中

$$\left.\begin{aligned}
&m^2 + (p_2 + k, p_2^*) - (kp_1) = 2E_2^2 - \frac{k'^2}{2} \\
&m^2 + (p_2 + k, p_1^*) - (kp_2) = 2E_1^2 - \frac{k'^2}{2} \\
&(kp_2) - (kp_1) + (k, k'^*) - 2(p_2 p_1^*) - 2m^2 = k'^2 - 4E_1E_2 \\
&(kp_1)(kp_2) + (k^* p_2)(kp_1^*) - (kp_1)(kp_1^*) \\
&\quad - (kp_2)(kp_2^*) - (p_2 p_1^*)(kk^*) - m^2(kk^*) = \omega^2 k'^2 - (kk')^2
\end{aligned}\right\} \tag{11.6 - 31}$$

将上式代入(11.6－30)，再将所得结果代入(11.6－18)，利用(11.6－16)和(11.6－12)就得微分截面

$$\begin{aligned}
\sigma = &\frac{Z^2\alpha^3\omega|p_2|}{4\pi^2|p_1|} \cdot \frac{dE_2}{|k'|^4} d\Omega_r d\Omega_e \Big\{\frac{(ep_1)^2}{(kp_1)^2}(4E_2^2 - k'^2) \\
&+ \frac{(ep_2)^2}{(kp_2)^2}(4E_1^2 - k'^2) - \frac{2(ep_1)ep_2)}{(kp_1)(kp_2)}(4E_1E_2 - k'^2) \\
&+ \frac{\omega^2 k'^2 - (kk')^2}{(kp_1)(kp_2)}\Big\}
\end{aligned} \tag{11.6 - 32}$$

(2)如果我们不测量光子的极化，应该将上式对光子的极化求

和。令 θ_1 和 θ_2 分别代表初末态电子动量 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 与辐射光子动量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角，φ 代表 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{k}$ 组成的平面与 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{k}$ 组成的平面之间的夹角，则有

$$
\begin{aligned}
&(kp_1)^2 = \omega^2(E_1 - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)^2 \\
&(kp_2)^2 = \omega^2(E_2 - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)^2 \\
&(kp_1)(kp_2) = \omega^2(E_1 - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(E_2 - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2) \\
&\sum_e (ep^2)^2 = |\boldsymbol{p}_2|^2\sin\theta_2, \quad \sum_e (ep_1)^2 = |\boldsymbol{p}_1|^2\sin^2\theta_1 \\
&\sum_e (ep_1)(ep_2) = |\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi \qquad (11.6-33)
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
\omega^2k'^2 - (k,k')^2 &= \omega^2\sum_e (ek')^2 = \omega^2\sum_e (e, p_2 - p_1 + k)^2 \\
&= \omega^2\sum_e[(ep_2) - (ep_1) + (ek)]^2 = \omega^2\sum_e[(ep_2) - (ep_1)]^2 \\
&= \omega^2(|\boldsymbol{p}_1|^2\sin^2\theta_1 + |\boldsymbol{p}_2|^2\sin^2\theta_2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

$$(11.6-34)$$

将(11.6－32)对光子极化 e 求和再利用上面两式结果就得到对光子极化求和(以及对电子自旋求平均)后的微分截面

$$
\bar{\sigma} = \frac{Z^2\alpha^3}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2}{\omega|\boldsymbol{k}'|^4}\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}G \qquad (11.6-35)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G = &\frac{|\boldsymbol{p}_1|^2\sin^2\theta_1}{(E_1 - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)^2}(4E_2^2 - |\boldsymbol{k}'|^2) \\
&+ \frac{|\boldsymbol{p}_2|^2\sin^2\theta_2}{(E_2 - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)^2}(4E_1^2 - |\boldsymbol{k}'|^2) \\
&- \frac{2|\boldsymbol{p}_1|\cdot|\boldsymbol{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi}{(E_1 - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(E_2 - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}(4E_1E_2 + 2w^2 - |\boldsymbol{k}'|^2) \\
&+ \frac{2\omega^2(|\boldsymbol{p}_1|^2\sin^2\theta_1 + |\boldsymbol{p}_2|^2\sin^2\theta_2)}{(E_1 - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(E_2 - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \qquad (11.6-36)
\end{aligned}
$$

这里 $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1$ 是库仑场(外场)给予电子和光子的动量，上式是贝脱和海脱勒(Bethe and Heitler 1934)首先导出的。

第十二章　重整化理论

上一章，我们利用 S 矩阵计算一些物理过程。在那里，我们只计算最低次近似，却得到与实验相当符合的结果。这说明，至少在电磁现象里，量子场论的确反映了客观规律。但当我们计算高次近似（考虑 S 矩阵展式以后各项）时，通过后面的讨论，我们将看到，所得结果总是无穷大，这就是所谓"发散困难"。由于在量子电动力学中低次近似计算与实验相当符合，所以在一个相当长时期内，人们认为，所有高级微扰修正都是没有物理意义的，应该不予考虑。但是，由于微波技术的发展，1947 年 Lamb、Retherford 用 3 厘米波技术精确地测定了氢原子的 $2S_{1/2}$ 与 $2P_{1/2}$ 能级的微小差别（根据 Dirac 理论，这两个能级是相同的）。如果认为高级微扰修正没有物理意义，那么氢原子的 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$的能级就不可能有任何差异，这就促使人们去考虑计算高级微扰修正所给出的发散的物理意义，并找到了克服发散困难的重整化方法。

§ 12.1　发散困难和重整化思想的引进

1. 发散困难

为了对量子电动力学中的发散困难有较好的理解，我们先回顾一下古典电动力学里的发散困难。在古典电动力学里存在两种发散困难，一种是电磁场的黑体辐射的紫外困难，即瑞利—琼斯计算黑体辐射能密度

$$u=\int_0^\infty \rho(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi KT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2\mathrm{d}\nu=\infty$$

由于这个发散与频率 ν 的无穷大有关，故称为紫外发散。显然辐射

能量密度 u 的无穷大导至辐射场总能量无穷大的荒谬结论。在1900年由普朗克引进能量子 $h\nu$ 的假设后这个困难得到克服。古典电动力学的另一个发散困难是荷电粒子的自能为无穷大。设荷电粒子的电荷分布在半径为 r 的球面上，其库仑场的能量（国际单位制）

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}v=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_r^{\infty}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

假如认为荷电粒子是无结构的点电荷（$r\to 0$），则其固有电磁场能量 W 为无穷大。由相对论的质能关系：$W=m_{em}c^2$，这相当于荷电粒子有附加的电磁质是 m_{em}。把 W 代入得

$$m_{em}=\frac{W}{c^2}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\propto\frac{1}{r}$$

可见，假如把荷电粒子当作点电荷，那么它就有一个附加的无穷大的电磁质量 m_{em}（以后我们用 δm 表示电磁质量），这是荒谬的。

在量子场论中，我们把物理粒子看成是由源粒子（裸粒子）和它的周围有许多云状分布的虚粒子所组成（如物理电子是由裸电子和虚光子组成，这些虚光子是由电子不断发射而又不断吸收的）。这种虚粒子的场称为固有场，源粒子与自身的固有场的作用，就是固有场的反作用。一个基本粒子的云与另一个基本粒子相互接触时，它们之间就产生相互作用，Wich(1938) 指出，质量为 m 的粒子固有场的云主要分布在半径 $r=\frac{\hbar}{mc}$ 的范围内，并且固有场粒子的能量愈高，接近核心处的密度亦愈大。计算结果固有场的反作用为无穷大，也就是说固有场的质量 δm 为无穷大。这就是量子场论中的一种发散困难（这与经典电动力学类似）。

除了无穷大的附加质量 δm 外，量子场论中还有无穷大的附加电荷。按照场论观点，光子也不断地在自已的周围产生正负电子对，又不断地吸收正负电子对，因而在自已的周围形成荷电的虚粒子云，这就是所谓光子自能（或称为真空极化）。电子在外来电磁场

作用下所被观测到的电子电荷将包含着由于真空极化所产生的附加电荷 δe 的贡献，实际计算的附加电荷 δe 亦为无穷大。

以后我们将看到，计算 S 矩阵元的高次近似时，其计算结果可以分为两部分：一部分代表由于固有场效应所引起的无穷大的附加质量 δm 和无穷大的附加电荷 δe，另一部分是有限的微扰修正（辐射修正）。

2. 重整化的物理意义

(1)重整化概念的确立

贝脱(Bethe 1947)从电子的固有场所起的影响清晰地解释了氢原子 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级的差异（称为氢原子能级的兰姆(Lamb)迁移）原因。为了使理论能够包括固有场的效应，那么不论固有场对电子质量的贡献 δm 是否为无穷大都必须包括在电子质量的观测值内。这样，我们可以希望从固有场对自由电子质量的贡献与对电子在库仑场中时的能量贡献的差来计算兰姆能级迁移。虽然固有场的贡献为无穷大，但上述二者的差可能是有限的。按照这种想法，Bethe 成功地得到和兰姆实验几乎相同的结果，从而确立了重整化的概念。由于当时没有完满的数学形式表达这种概念，Bethe 的计算是非相对论的。随后，朝永等 (Fukuda Miyamoto & Tomonaga 1949)、许温格 (Schwinger 1948)、费曼 (Feynman 1949) 和戴孫 (Dyson 1949)建立了协变形式的微扰论方法，得到处理这些无穷大的比较有效的数学方法。

(2)重整化的物理意义

通常人们认为电子有“机械质量”(或称裸质量)m，由于电子与其固有场发生相互作用产生了附加质量(又称电磁质量)δm。但实验上可观测的电子质量应是电子的总质量 $m_0 = m + \delta m$，实验上不可能分别测量电子的裸质量 m 和附加质量 δm。因此，为了和实验一致，在理论上应该把裸质量 m 和附加质量合并起来作为观测到的电子质量，这种重新定义电子质量的过程，称为质量重整化。同样，实验上不可能分别测量电子的“裸电荷”e 及其由真空极化所产生的附加电荷 δe，而实验测量到的电荷应是两者的总和。因此理

论上也应将裸电荷和附加电荷 δe 合并起来作为实验上所观测到的电子电荷 $e_0, e_0 = e + \delta m$，这种将电子电荷重新定义的过程称为电荷重整化。

以后我们将看到，经过质量和电荷重整化后，量子电动力学中 S 矩阵元各级计算时出现的无穷大都被吸收进重整化的质量和电荷之中。当令重整化了的质量和电荷取实验观测的有限值时，就相当于把无穷大的附加质量和附加电荷分割出去。于是量子电动力学中 S 矩阵元各级计算中就不再出现无穷大，剩下的只是微小的修正。现在，这种理论上的微小修正已得到一些实验的证实(如上述的兰姆能级迁移等)。

3. **发散的分类**

在高次近似计算中所出现的无穷大(发散)可区分为下列四类：

(1)红外发散；

(2)与某一种闭合图形相连系的发散；

(3)“严重”发散；

(4)真空起伏。

红外发散是由求解时所用的某种特殊的数学方法引起的，可用改善数学处理方法把它避免。其余三种都是由于中间状态的虚粒子的动量很大而引起。

第(2)类发散包括光子自能、光子与光子散射图形。由于这种发散比较难处理，一般须用规范变换不变性理论处理，但也可和下述第(4)类同样的精神处理。

第(3)类发散包含电子自能、真空极化或顶角部分这三种图形，因为好像没有简单和完满的方法来消除这种发散，所以称为“严重”发散。现在用的方法分为二个步骤：第一步把无穷大从 S 矩阵元中分割出来，第二步证明把无穷大消去就相当于质量重整化和电荷重整化。本章将详细讨论这种发散的处理。

第(4)类包含真空起伏图形，是与对真空的描述有关的发散，下面我们将证明真空起伏的总效果只改变态的位相，而不产生任

何物理效应。

§12.2 闭合回路 真空起伏

1.闭合回路

在某些费曼图形中常常包含着费米子线所组成的闭合回路，其中也包括了没有外粒子线的闭合回路，它反映从真空到真空的起伏过程。例如，图12－1a 代表光子自能图形；b 代表光子与光子相互散射的一个图形；c 代表真空起伏的一个图形。

一般地说，在费曼图形中如果包含一个闭合回路，则在 S 矩阵元中就相应地出现一个求矩阵迹的符号 Sp，同时产生一个因子（－1）。例如，光子自能（图 a）的正规乘积可写为

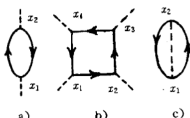


图 12－1

$$
\begin{aligned}
&N\{(\bar\psi\hat A\psi)_{x_2}(\bar\psi\hat A\psi)_{x_1}\} \\
&=(-1)Sp\{\underbrace{\psi(x_1)\bar\psi(x_2)}\gamma_\nu\underbrace{\psi(x_2)\bar\psi(x_1)}\gamma_\mu\}N\{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)\}
\end{aligned}
\qquad (12.2-1)
$$

在上式中的负号是由于 $\bar\psi(x_2)$ 移到 $\psi(x_1)$ 的后面组成收缩函数而产生的，即 $\underbrace{\bar\psi(x_2)\psi(x_1)}=-\underbrace{\psi(x_1)\bar\psi(x_2)}$。求迹符号 Sp 的来源，只要利用公式：

$$\underbrace{\psi_\alpha(x_2)\bar\psi_\beta(x_1)}=S_{F,\alpha\beta}(x_2-x_1)$$

把(12.2－1)式中的旋量标符 α、β 明显写出就可看出。

2.法雷定理

法雷(Furry，1937)曾求得关于闭合回路的一个定理：假使费曼图形中包含着一个闭合回路，其顶角数为奇数，则对 S 矩阵元的贡献为零。

这个定理的证明可根据理论的电荷对称来证明。例如，图12－2a 包含一个闭合回路，其电子线的指向是反时针方向的，在同一

个物理过程中还必有一个图形 b 和 a 相对应，不同的仅仅是电子线的指向相反，其它的一切物理量均相同。因此图 b 的贡献，可从图 a 的

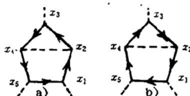


图 12—2

$\bar{\psi}(x_i)\gamma_\mu\psi(x_i)$ 用 $\psi^T(x_i)\gamma_{\mu T}\bar{\psi}^T(x_i)$ 去代替得到。这就是说图 a 的 $\bar{\psi}(x_i)\gamma_\mu\psi(x_i)$ 用它的电荷共轭 $\bar{\psi}^c(x_i)\gamma_\mu\psi^c(x_i)$去代替就得到图 b。

因为 $\bar{\psi}^c(x_i)\gamma_\mu\psi^c(x_i)=-\bar{\psi}(x_i)\gamma_\mu\psi(x_i)$，故图 b 和图 a 的积分仅相差一个因数$(-1)^m$，这里 m 是顶角数。设 A 为图 a 的矩阵元，那么图 b 的矩阵元为$(-1)^m A$，而这个物理过程的矩阵应为图 a 和图 b 的和。故当 m 为奇数时这两个图形的和为零，此即法雷定理。若 m 偶数，则这两个图形的贡献为 $2A$。

3. 真空起伏

真空起伏最简单的典型可用下列的图形来代表：

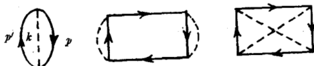


图 12—3

每一个这类图形所对应的 S 矩阵元将出现发散。现以第一个图形作为说明的例子。第一图对应的 S 矩阵元将正比例于

$$M=\int\delta(k+p-p')\delta(k+p-p')$$

$$\frac{1}{k^2}Sp\left(\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\mu\frac{i\hat{p}'-m}{p'^2+m^2}\gamma_\mu\right)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p'\,\mathrm{d}^4k$$

对 k 积分得

$$M=\int\delta(0)\frac{1}{(p-p')^2}Sp\left(\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\mu\frac{i\hat{p}'-m_0}{p'^2-m_0^2}\gamma_\mu\right)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p'$$

上式中的 $\delta(0)$ 函数与所考虑的场的四维体积成比例，M 的值当对内电子线动量 p、p' 积分时将出现发散。一般说，不同的真空起伏图形具有不同的发散值 M_γ。令

$$C = \sum_{\gamma} M_{\gamma}$$

其中求和包括所有不同的真空起伏图形及其各种可能的组合，那末 C 就是 S 矩阵中所含的真空起伏的总和。由于动量—能量守恒的要求，真空态只能过渡到真空态，其它由真空态过渡到非真空态的 S 矩阵元均为零。所以真空态应为 S 矩阵的本征态，其对应的本征值即为 C，可写为 $S|0>=C|0>$。由于 S 为幺正矩阵，故 C 的绝对值为 1，或写成 $C=e^{i\alpha}$（α 为实数）。上述 M 具有发散值，正反映出 α 无穷大，由此可以看出真空起伏的总效应为真空态矢量经过无穷大的位相变换而已。

对于某一具体物理过程中的 S 矩阵元也包含了真空起伏。例如康普顿散射的各级修正包含着各种可能的真空起伏图形：



图 12—4

因此对于任一具体过程的 S 矩阵实际应为 $S=(\sum_{\gamma} M_{\gamma})S'=CS'$，其中 S' 为不考虑真空起伏的矩阵元。由于 C 的绝对值为 1，故我们计算过渡几率时可以不考虑无关紧要的由真空起伏所引起的位相迁移，而令 $S=S'$。在以后讨论中我们将不考虑有关真空起伏的图形。

§12.3 自由电子的自能

1. 电子自能

电子自能的图形最简单的是单独一个电子的自能（图12—5a），但也可作为较复杂过程的一部分，插入在外电子线或内电子线中，例如 图 b 和图 c。

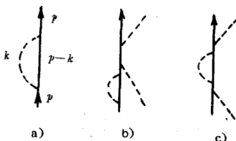


图 12—5

本节我们先讨论单个电子的自能，下一节讨论较复杂物理过程中包含电子自能部分的问题。

因为一个单独的电子是一个稳定的粒子，即在始态和终态时都只有一个电子，故 S 矩阵对这一过程的最低次近似是由 $S^{(0)}=1$ 给出的，下一个高次近似是由 $S^{(2)}$ 给出的。根据图 a 可以写出 $S^{(2)}$ 矩阵元：

$$S_{fi}^{(2)}=\delta(p-p)e^2\bar{u}(p)\int\frac{\mathrm{d}^4k}{k^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m}{(p-k)^2+m^2}\gamma_\mu u(p)$$

$$=\delta(p-p)\bar{u}(p)\Sigma^{(2)}(p)u(p) \qquad (12.3-1)$$

其中我们引入了记号 $\Sigma^{(2)}(p)$：

$$\Sigma^{(2)}(p)=e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{k^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m}{(p-k)^2+m^2}\gamma_\mu \qquad (12.3-2)$$

为了看清记号 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的作用，可从更一般的情况出发。图12－5a 可作为较大图形中的一个内部，于是它的二个外电子线就相应于二个费米子的传播函数 $S_F(p)$，而对应于这样的内部图形的因子为

$$S_F(p)\Sigma^{(2)}(p)S_F(p)$$

我们强调指出，在这种情况下应该把图12－5a 看作是图12－6a 的传播函数 $S(p)$ 的一个修正，而 $S(p)$ 是微扰展式中较低次近似中的一个因子，因而修正后的传播函数 $S'(p)$ 就相应于图 b，它具有如下的形式：

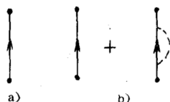


图 12－6

$$S'_F(p)=S_F(p)+S_F(p)\Sigma^{(2)}(p)S_F(p) \qquad (12.3-3)$$

显然，这种看法可以推广到更高次的电子自能图形。这一点我们将在以后讨论。

2. 无穷大的分割

现在我们来讨论(12.3－2)式积分的发散情况。应用公式 $\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu=-2\hat{A}$ 可将(12.3－2)式写为

$$\Sigma^{(2)}(p)=-2e^2\int\frac{d^4k}{k^2}\frac{i(\hat{p}-\hat{k})+2m}{(p-k)^2+m^2} \qquad (12.3-4)$$

今后处理发散积分的讨论中，常常利用到下列两个费曼公式（附录Ⅳ）

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}$$

$$\cdot\frac{1}{[a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots a_n(1-x)]^n}$$

当 $n=2$时

$$\frac{1}{a_1a_2}=\int_0^1 dx\frac{1}{[a_1x+a_2(1-x)]^2} \qquad (12.3-5)$$

和
$$\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}=\int_0^1\frac{n(\beta-\alpha)dz}{[\alpha z+\beta(1-z)]^{n+1}} \qquad (12.3-6)$$

利用(12.3—5)，可将(12.3—4)式中分母的二个因子合并为一个因子的平方，得到

$$\Sigma^{(2)}(p)=-2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\frac{i(\hat{p}-\hat{k})+2m}{\{(k-px)^2+l^2\}^2} \qquad (12.3-7)$$

其中
$$l^2=m^2x^2+(p^2+m^2)x(1-x)$$

积分(12.3—6)是对 k 的四维积分，显然当 $k\to\infty$ 时，这个积分线性发散，发散的来源是由于积分区域$\int d^4k$ 本身就是无穷大。在费曼图形中反映着始态的电子可以放出各种不同的k(动量—能量)的光子，然后再吸收这些光子而达到终态电子。因此在中间态中可以存在着无穷多种的虚光子，故积分(12.3—6)的发散与无穷多种虚光子的存在有密切联系，亦即与电磁场的无穷多个自由度有联系。一般地说，在量子场论中的各种发散积分都与场的无穷多的自由度相联系。

在以后的讨论中常常会遇到发散积分，关于发散积分的处理方法我们写在附录Ⅳ中。这里只指出，为了进行积分的方便，我们适当移动积分的原点，使得积分的分母中只出现k^2的项，而不出现k 的一次项。但移动积分原点时应注意：(1)对数性发散积分原点

可以随便移动而积分的数值不会改变。(2)线性发散积分当原点移动后，积分的数值改变ΔI是一个有限的常数。(3)n次发散积分的原点移动后积分的数值改变ΔI可能是一个$(n-1)$次发散的数值。在附录Ⅳ中证明了如下二个常用的发散积分的例子：

$$I_0=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\{(k-b)^2+a^2\}^2}\text{是对数发散},\Delta I_0=0 \quad (12.3-8)$$

$$I_1=\int\frac{k_\mu\mathrm{d}^4k}{\{(k-b)^2+a^2\}^2}\text{是一次发散},\Delta I_1=-\frac{i}{2}\pi^2 b_\mu \quad (12.3-9)$$

我们利用(12.3－8)和(12.3－9)的结果将(12.3－7)式的积分原点移动。在(12.3－7)式中只有与分子中$-i\hat{k}$相应的项是一次发散而其它二项是对数性发散，故当积分原点移动$k\to k+px$后可得

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)}(p)&=-2e^2\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\frac{i\hat{p}+2m-i(\hat{k}+\hat{p}x)}{(k^2+l^2)^2}-2e^2\int_0^1\mathrm{d}x(-i)^2\frac{\pi}{2}\hat{p}x\\&=\frac{\pi^2e^2\hat{p}}{2}-2e^2\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\frac{i\hat{p}(1-x)+2m-i\hat{k}}{(k^2+l^2)^2}\end{aligned} \quad (12.3-10)$$

可以看出，由于对称性原因，上式右方积分中与$-i\hat{k}$相应的一项的贡献等于零。将上式代入(12.3－1)式，并注意到对于自由电子的波函数$u_{s_1}(p_1)$满足

$$(i\hat{p}_1+m)u_{s_1}(p_1)=0,\qquad p_1^2=-m^2 \quad (12.3-11)$$

就可得到

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle=-i(2\pi)^4A\bar{u}_{s_1}u_{s_1}\delta(p_1-p_2) \quad (12.3-12)$$

$$A=\frac{-e^2m}{(2\pi)^4}\left(\frac{\pi^2}{2}+2i\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\frac{1+x}{(k^2+m^2x^2)^2}\right) \quad (12.3-13)$$

因此，计算$\langle f|S^{(2)}|i\rangle$就归结为计算$A$的问题。应用分部积分方法不难将$A$中的积分分为二个积分：

$$\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1+x}{(k^2+m^2x^2)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2 + m^2)^2} + 2m^2 \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \frac{x^2(2 + x)\mathrm{d}x}{(k^2 + m^2 x^2)^3} \quad (12.3-14)$$

上式右方第一个积分是对数性发散的，可以先令这一积分的极限取有限的数值，在积分后再令极限趋于无穷大，这样可看出积分本身如何发散。在进行积分时，我们将对 k_0积分途径改取虚轴，并引入四维空间的球坐标(参阅附录Ⅳ)

$$\mathrm{d}^4 k = K^3 \mathrm{d}K \mathrm{d}\varphi \sin\theta \mathrm{d}\theta \sin^2 \Phi \mathrm{d}\Phi$$

于是 $$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2 + m^2)^2} = i\pi^2 \int \frac{K^2 \mathrm{d}K^2}{(K^2 + m^2)^2} \qquad (k^2 = K^2)$$

$$(12.3-15)$$

将 K^2的上限取做 M^2，积分后令 $M^2 \to \infty$就得到

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2 + m^2)^2} = i\pi^2 D \quad (12.3-16)$$

其中 $$D = \lim_{M \to \infty} \{ \ln \frac{M^2 + m^2}{m^2} + \frac{m^2}{M^2 + m^2} - 1 \}$$

$$(12.3-17)$$

可见 D 是对数性发散的。

计算(12.3－14)右方第二个积分，利用如下的公式[阅附录Ⅳ(9)式]：

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2 + a^2)^n} = i\pi^2 \frac{1}{(n-1)(n-2)a^{2(n-2)}}, (n \geqslant 3)$$

$$(12.3-18)$$

就可得到

$$2m^2 \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^2(2 + x)}{(k^2 + m^2 x^2)^3} = \frac{5}{2} i\pi^2 \quad (12.3-19)$$

将(12.3－16)、(12.3－19)两式代入(12.3－14)，然后再代入(12.3－13)就得到

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{4\pi} 3m(D + \frac{3}{2}) \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \end{aligned}\right\} \quad (12.3-20)$$

因为 D 是对数性发散的，可见 A 以及 $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$ 也是对数性

发散的。

3. 质量重整化

现在我们研究单个自由电子的$\langle f|S^{(2)}|i\rangle$在物理上代表什么作用?假设相互作用哈密顿密度具有如下的形式:

$$\mathscr{H}_i'(x)=\delta m\bar{\psi}(x)\psi(x)\quad \delta m=A \qquad (12.3-21)$$

那末,它对单个自由电子S矩阵的第一次近似的矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle f|S'^{(1)}|i\rangle &= -i\langle f|\mathrm{d}^4x\,\delta m\bar{\psi}\psi|i\rangle \\ &= -i(2\pi)^4\delta m\bar{u}_{s_1}u_{s_2}\delta(p_1-p_2)\end{aligned} \qquad (12.3-22)$$

将上式与$\langle f|S^{(2)}|i\rangle$的表式(12.3－12)相比较,就可看出这二个表式完全一样。因此,在物理上我们可以将$\langle f|S^{(2)}|i\rangle$作如下的理解:自由电子(裸质量$m$)与电磁场相互作用产生了电子的电磁质量$\delta m$,而电子的电磁质量$\delta m$又导致了$\langle f|S^{(2)}|i\rangle$。

在以上的讨论中,实际上我们将电子的质量划分为裸质量m和电磁质量δm二部分,将裸质量划入自由电子的哈密顿,而将电磁质量划入相互作用哈密顿。这种做法显然是不合适的,因为在实验上我们根本不能区分裸质量和电磁质量,而观察到的是二者的和。因此我们应该将电子的电磁质量从相互作用哈密顿中取出,归入自由电子场的哈密顿。令

$$m_0=m+\delta m \qquad (12.3-23)$$

代表实验所观察到的自由电子的质量,(即我们所处理的自由电子不是'光身'的,而是'穿着衣服'的),那末自由电子场的哈密顿密度就应该是

$$\mathscr{H}_e=\bar{\psi}\gamma_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+m_0\bar{\psi}\psi \qquad (12.3-24)$$

而相互作用的哈密顿密度应该是

$$\mathscr{H}_i=-ieN(\bar{\psi}\hat{A}\psi)-\delta m\bar{\psi}\psi \qquad (12.3-25)$$

$$\delta m=A=\frac{\alpha}{4\pi}3m_0\left(D+\frac{2}{3}\right) \qquad (12.3-26)$$

假使在讨论自由电子问题时只限于α的一次方近似,那么(12.3－25)式右方的$-ieN(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$项对$S$矩阵元的贡献就恰好与

$-\delta m\bar{\psi}\psi$ 的贡献相抵消。也就是说，在这一近似中无穷大不再出现。将固有质量与电磁质量合并起来的过程，叫做质量重整化过程。

当然，在讨论自由电子的更高次近似 S 矩阵元时，仍然出现与 α^2、α^3… 成比例的更高次的电磁质量，这就应该将电子的质量作更高次的重整化，这时，δm 的形式将包括与 α^2、α^3…成正比的一些项。

§ 12.4　电子自能部分

1. 内电子线的电子自能部分

质量重整化虽然克服了自由电子问题中的发散困难。但是，还不能克服其它一些发散困难。因为对于某一物理过程的内电子线和外电子线也可以包含着电子自能的情形。这时，经过质量重整化后还不能克服其发散困难。例如，图12－7a 反映康普顿散射的最低次近似过程之一，而图 b 则代表同一散射现象的较高级近似过程之一，它的内电子线包含着电子自能部分。

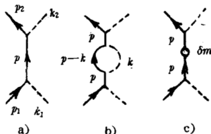


图 12－7

显然，与图 a 相应的 S 矩阵元是

$$< f|S^{(2)}|i> = \frac{e^2(2\pi)^8}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2S_F(p)\hat{e}_1u_1$$

$$\cdot\,\delta(p_1+k_1-p)\delta(p-p_2-k_2) \qquad (12.4-1)$$

其中 $S_F(p)$ 的表式是

$$S_F(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2} \qquad (12.4-2)$$

图 b 和图 a 的外电子线都相同，只有内电子线不同。根据上节所述，可知与图 b 相应的矩阵元 $< f|S^{(4)}|i>$ 是以

$$S_F(p)\Sigma^{(2)}(p)S_F(p) \qquad (12.4-3)$$

代替(12.4－1)式中的 $S_F(p)$ 就可得到，由于 $\Sigma^{(2)}(p)$ 是发散的，故

$< f|S^{(4)}|i >$ 也是发散的。假使我们进行质量重整化，取(12.3－24)式作为相互作用哈密顿密度，那末 $S^{(3)}$ 中还有一项也对康普顿散射作出贡献，与它相应的过程可用图 c 表示，相应的矩阵元 $< f|S^{(3)}|i >$ 是以

$$S_F(p)\{i(2\pi)^4\delta m\}S_F(p) \qquad (12.4-4)$$

代替(12.4－1)式中的 $S_F(p)$ 就可得到。

因此，图 a、b、c 贡献的总和可写为

$$< f|S^{(2)}+S^{(3)}+S^{(4)}|i > = \frac{e^2(2\pi)^8}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2$$

$$\cdot S_F^{(2)}(p)\hat{e}_1u_1\delta(p_1+k_1-p)\delta(p-p_2-k_2)$$

其中 $S_F^{(2)}(p)$ 代表(12.4－1)式中的 $S_F(p)$ 与(12.4－3)、(12.4－4)两式的和：

$$S_F^{(2)}(p) = S_F(p) + S_F(p)\{\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m\}S_F(p) \qquad (12.4-5)$$

这就是说，只要将(12.4－1)式中的 $S_F(p)$ 换成 $S_F^{(2)}(p)$，就能够得到图 a、b 和 c 的贡献总和。

可以看出，只有当 $p^2=-m_0^2$ 的时候，即只有 $\Sigma^{(2)}(p)$ 作用在自由电子的波函数上的结果相当于 $i\hat{p}$ 为 $-m_0$ 所代替的时候，$\Sigma^{(2)}(p)$ 才会与 $i(2\pi)^4\delta m$ 相互消去。但是，现在我们所讨论的中间状态中出现的电子的动量－能量 $p=p_1+k_1$，它并不满足自由电子的动量－能量的关系式，因此(12.4－5)式中的 $i(2\pi)^4\delta m$ 未必能消去 $\Sigma^{(2)}(p)$ 中的无穷大。这就是说，即使进行了质量重整化，散射矩阵元仍然可能是发散的。

象图 b 和图 c 中间部分的图形，也可以在其它现象的高次近似图形中出现，它们的实际效果是将 $S_F(p)$ 换成 $S_F^{(2)}(p)$。我们称 $S_F(p)$ 为电子传播函数的零次近似，称 $S_F^{(2)}(p)$ 为电子传播函数的二次近似。而 $S_F(p)$ 则与 e 无关，$\Sigma_F^{(2)}(p)$ 是 e 的二次函数，亦可将 $S_F(p)$ 写作 $S_F^{(0)}(p)$。

为了看清 $S_F^{(2)}(p)$ 的发散性质，必须研究 $\Sigma^{(2)}(p)$ 在 $p^2\neq -m_0^2$ 时的数值。为此，我们可以将 $\Sigma^{(2)}(p)$ 展开成 $(i\hat{p}+m_0)$ 的幂级数至

二次项。

$$\Sigma^{(2)}(p)=\Sigma^{(2)}(p)\big|_{i\hat{p}+m_0=0}+\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p}\Big|_{i\hat{p}+m_0=0}(i\hat{p}+m_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p}\Big|_{i\hat{p}+m_0=0}(i\hat{p}+m_0)^2$$

比较(12.3—1)与(12.3—10)式,并注意 $A\equiv\delta m$,上式第一项可得到

$$\Sigma^{(2)}(p)\big|_{i\hat{p}+m_0=0}=-i(2\pi)^4\delta m$$

此外,注意到

$$S_F=\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m_0}{p^2+m^2}=\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m_0}{(i\hat{p}+m_0)(i\hat{p}-m_0)}=\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{i\hat{p}+m_0}$$

即 $$S_F^{-1}=i(2\pi)^4(i\hat{p}+m_0)$$

将这些结果代入 $\Sigma^{(2)}(p)$的展开式,可写成

$$\Sigma^{(2)}(p)=-i(2\pi)^4\delta m+BS_F^{-1}(p)+S_F^{-2}\Sigma_F^{(2)}(p) \tag{12.4-6}$$

其中 B 和 $\Sigma_F^{(2)}(p)$是待定系数。

下面,我们分别计算 B 和 $\Sigma_F^{(2)}(p)$。结果表明,B 是对数性发散的,而 $\Sigma_F^{(2)}(p)$不包含无穷大。

由于 $\delta m=A$,利用(12.3—13)、(12.3—10)式可得

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)}(p)+i(2\pi)^4\delta m=&-\frac{1}{2}e^2\pi^2(i\hat{p}+m_0)\\&-2e^2\int d^4k\int_0^1dx\frac{i\hat{p}(1-x)+2m_0}{\{k^2+l^2\}^2}\\&+2e^2\int d^4k\int_0^1dx\frac{-m_0(1-x)+2m_0}{\{k^2+m_0^2x^2\}^2}\end{aligned} \tag{12.4-7}$$

可将上式改写为

$$\begin{aligned}&\Sigma^{(2)}(p)+i(2\pi)^4\delta m\\&=(i\hat{p}+m_0)\{-\frac{i}{2}e^2\pi^2-2e^2\int d^4k\int_0^1dx\frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2}\}\end{aligned}$$

$$- 2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\{i\hat{p}(1-x)+2m_0\}\{\frac{1}{(k^2+l^2)^2}-\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2}\}$$

(12.4－8)

为了将上式右方最后一项中的因子$(i\hat{p}+m_0)$分出来，可将这一项改成另一形式。利用(12.3－6)和(12.3－7)式中l^2的表达式可以得

$$\frac{1}{(k^2+l^2)^2}-\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2}=-\int_0^1 dz\frac{2(p^2+m_0^2)x(1-x)}{\{k^2+g^2\}^3}$$

(12.4－9)

$$g^2=m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z$$

将(12.4－9)代入(12.4－8)，可见(12.4－8)式右方最后一项是收敛的。于是可改变积分的次序先对d^4k积分，并利用(12.3－18)式求得这一项为

$$2ie^2\pi^2(p^2+m_0^2)\int_0^1 dx\int_0^1 dz\frac{x(1-x)\{i\hat{p}(1-x)+2m_0\}}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}$$

(12.4－10)

将上式代入(12.4－8)，考虑到$(p^2+m_0^2)=-(i\hat{p}+m_0)(i\hat{p}-m_0)$可得

$$\Sigma^{(2)}(p)+i(2\pi)^4\delta m=S_F^{-1}(p)\{-\frac{\alpha}{8\pi}+\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 dx\frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2}$$
$$-\frac{\alpha}{2\pi}(i\hat{p}-m_0)\int_0^1 dx\int_0^1 dz\frac{x(1-x)[i\hat{p}(1-x)+2m_0]}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}\}$$

(12.4－11)

将上式与(12.4－6)

$$\Sigma^{(2)}(p)+i(2\pi)^4\delta m=S_F^{-1}(B+S_F^{-1}\Sigma_F^{(2)})$$

比较，可见(12.4－11)式中大括号等于$B+S_F^{-1}\Sigma_F^{(2)}$，而当$i\hat{p}=-m_0$或$\hat{p}^2=-m_0^2$时，$S_F^{-1}=0$，此时，(12.4－11)的大括号就是B。

为了计算B，我们先计算上式大括号中的第二项。在对dx分部积分后，得

$$\int d^4k\int_0^1 dx\frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2}=\int d^4k\int_0^1\frac{d(x-\frac{x^2}{2})}{(k^2+m_0^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(k^2+m_0^2)^2} + 2m_0^2\int d^4k\int_0^1 dx \frac{x^2(2-x)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}$$

$$= \frac{i}{2}\pi^2 D + \frac{3}{2}i\pi^2 \qquad (12.4-12)$$

故大括号中第二项$= -\frac{\alpha}{4\pi}D - \frac{3\alpha}{4\pi}$ (12.4 − 13)

又当 $i\hat{p} = -m_0$时(12.4−11)式右方大括号中的第三项等于

$$m_0^2\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 dz\frac{x(1-x)(1+x)}{m_0^2x^2} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{x} - \frac{\alpha}{2\pi} \qquad (12.4-14)$$

于是

$$B = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(D - 4\int_0^1\frac{dx}{x} + \frac{11}{2}\right) \qquad (12.4-15)$$

可见 B 也是对数性发散的，而且 B 包含着二种不同的发散。D 在积分的上限发散，而上式中的第二个积分$\int_0^1 dx/x$是积分的下限发散。这二种发散在物理上有不同的意义。D 的发散来自大能量的光子，故称为紫外发散；$\int_0^1 dx/x$ 的发散来自极小能量的光子，故称为红外发 散。红外发散的来源是由于所用的数学方法不适合处理低能量光子与电子的相互作用，因为随着光子的能量 $\omega\to 0$，光子与电子的相互作用愈来愈大，所以用微扰法来处理就不适合。以后我们将不讨论克服红外发散困难的方法。

现在，我们求 $\Sigma_F^{(2)}(p)$的表式。为书写方便，用记号{12.4−11}表示(12.4−11)式中大括号内的函数。比较(12.4−6)和(12.4−11)两式有

$$S_F^{-1}(B - S_F^{-1}\Sigma_F^{(2)}) = S_F^{-1}\{12.4-11\}$$

由上式有

$$\Sigma_F^{(2)} = S_F(\{12.4\text{-}11\} - B)$$
$$= S_F(\{12.4\text{-}11\} - \{12.4\text{-}11\}|_{i\hat{p}=-m_0})$$

注意到{12.4−11}中只有第三项含 $\hat{p}$，故简化为

$$\Sigma_F^{(2)} = S_F\left(\begin{Bmatrix}12.4\text{-}11\\ \text{第三项}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12.4\text{-}11\\ \text{第三项}\end{Bmatrix}_{i\hat{p}=-m_0}\right)$$

由(12.4—14)知

$$\begin{Bmatrix} 12.4\text{-}11 \\ \text{第三项} \end{Bmatrix}_{|i\hat{p}=-m_0} = m_0^2 \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)(1+x)}{m_0^2 x}$$

将上式代入前式得

$$\Sigma_F^{(2)} = S_F \int_0^1 dx \int_0^1 dz$$

$$\{(-\frac{\alpha}{2\pi})(i\hat{p}-m_0)x(1-x)\frac{[i\hat{p}(1-x)+2m_0]}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\frac{m_0^2x(1-x)(1+x)}{m_0^2x^2}\}$$

$$= S_F(-\frac{\alpha}{2\pi})\int_0^1 dx \int_0^1 dz$$

$$\frac{m_0^2x^2(i\hat{p}-m_0)x(1-x)[i\hat{p}(1-x)+2m_0]}{m_0^2x^2[m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z]}$$

$$+\frac{2m_0^2x(1-x)(1+x)[m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z]}{m_0^2x^2[m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z]}$$

上式分子可简化成

$$m_0^2x^2(1-x)(i\hat{p}+m_0)\{(i\hat{p}-m_0)(1-x)[x-2(1+x)z]$$

$$+m_0x(1+x)\}$$

将 $S_F = \frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{(i\hat{p}+m^0)}$ 代入,最后有

$$\Sigma_F^{(2)}(p) = \frac{i\alpha}{(2\pi)^5}\int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x)$$

$$\frac{(i\hat{p}-m_0)(1-x)[x-2(1+x)z]+m_0x(1+x)}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z} \tag{12.4-16}$$

可见 $\Sigma_F^{(2)}(p)$ 中不存在紫外困难，但存在着红外困难。这种红外困难是人为的，在(12.4 — 11) 的右方第三项本来是收敛的，后来人为地将这一项折成二部分：一部分归入 B 的表式中，另一部分归入 $\Sigma_F^{(2)}(P)$ 的表式中，结果两方面都产生了红外困难。假使不计红外困难，那末，$\Sigma_F^{(2)}(p)$ 则不包含无穷大，而 B 是对数性发散的。

将(12.4—6)代入(12.4—5)可得

$$S_F^{(2)}(p) = (1 + B)S_F(p) + \Sigma_F^{(2)}(p)$$

假使我们的讨论只限于二次近似，那么可将上式改写为

$$S_F^{(2)}(p) = (1 + B)\{S_F(p) + \Sigma_F^{(2)}(p)\} \quad (12.4 - 17)$$

这就是电子传播函数的二次近似的表式，其中 $S_F(p)$是电子传播函数的零级近似。

2. **外电子线的电子自能部分**

电子自能部分对外电子线也能产生修正的影响。我们知道，在动量表象中外部电子线由波函数 $u(p)$或 $\bar{u}(p)$代表。不难看出，电子自能部分将代表外电子线的波函数修正为

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)}(p) &= u(p) + S_F(p)\{\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m\}u(p) \\ \bar{u}^{(2)}(p) &= \bar{u}(p) + \bar{u}(p)\{\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m\}S_F(p) \end{aligned}\right\}$$

$$(12.4 - 18)$$

以 $\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m = BS_F^{-1} + S_F^{-2}\Sigma_F^{(2)}$ 代入上式，由于

$$S_F^{-1}(p)u(p) = 0, \qquad \bar{u}(p)S_F^{-1}(p) = 0$$

于是(12.4—18)式可写为

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)}(p) &= u(p) + BS_F(p)S_F^{-1}(p)u(p) \\ \bar{u}^{(2)}(p) &= \bar{u}(p) + B\bar{u}(p)S_F^{-1}(p)S_F(p) \end{aligned}\right\} (12.4 - 19)$$

上式的右方是不定的，因为假使 $S_F^{-1}(p)$先作用在波函数上，就得

$$u^{(2)}(p) = u(p) \qquad \bar{u}^{(2)}(p) = \bar{u}(p) \qquad (12.4 - 20)$$

假使 $S_F^{-1}(p)$ 先作用在 $S_F(p)$上，则得

$$u^{(2)}(p) = (1 + B)u(p) \qquad \bar{u}^{(2)}(p) = (1 + B)\bar{u}^{(2)}(p)$$

$$(12.4 - 21)$$

为了确定电子自能部分到底应该怎样修改波函数 $u(p)$ 和 $\bar{u}(p)$，我

们作如下的物理考虑：一个电子前后参加二个过程，当它结束第一过程但还没有进入第二过程时可用第一过程的射出电子线来代表，也可以用第二过程的射入电子线来代表；但当将二个过程当作一个总过程看，则这个电子就由一条内电子线来代表，而它的两端就是前面的二条外电子线。因此电子自能部分对这二条外电子线的波函数的修正影响应该和对一条内电子线的电子传播函数的影响相当。考虑到这条内电子线实际上代表着自由电子，因此有

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)}(p) &= \sqrt{1+B}\,u(p) \\ \bar{u}^{(2)}(p) &= \sqrt{1+B}\,\bar{u}(p) \end{aligned}\right\} \qquad (12.4-22)$$

也就是说应该取(12.4－20)和(12.4－21)的几何平均值，(12.4－22)式有时称为波函数重整化。

3. 电荷重整化

以上的讨论指出电子自能部分对内电子线或外电子线都作了无穷大的修正，现在来研究这种修正在物理上所代表的意义。可以看出，电子自能部分对 S 矩阵元的修正可归纳为：

(1)用 $S_F^{(2)}(p) = (1+B)\{S_F(p) + \Sigma_F^{(2)}(p)\}$ 代替 $S_F(p)$去代表内电子线。

(2)用 $u^{(2)}(p) = \sqrt{1+B}u(p)$ 和 $\bar{u}^{(2)}(p) = \sqrt{1+B}\bar{u}(p)$ 分别代替 $u(p)$ 和 $\bar{u}(p)$去代替外电子线。

我们也可以改用另一种方式来表达这种修正：

(1)用 $S_{F0}^{(2)}(p) = S_F(p) + \Sigma_F^{(2)}(p)$ $\qquad (12.4-23)$

代替 $S_F(p)$ 去反映内电子线，外电子线则仍然用 $u(p)$ 或 $\bar{u}(p)$代表。

(2)此外，每一条外电子线还贡献一个因子$\sqrt{1+B}$。

设某一费曼图一共有 E_i 条内电子线和 E_e 条外电子线，并有 n 个顶角，则

$$n = E_i + \frac{E_e}{2}$$

令电子自能部分的作用除了将 $S_F(p)$ 换为 $S_{F_0}^{(2)}(p)$ 之外还对 S 矩阵添上一个因子

$$(1+B)^{E_i+\frac{E_e}{2}}=(1+B)^n \qquad (12.4-24)$$

但与这图形相应的 S 矩阵元前面必定有一个因子 e^n，将上式和 e^n 合并起来就等于以

$$e_1=(1+B)e \qquad (12.4-25)$$

去代替 e，因此电子自能部分的一部分作用是使电子的电荷发生改变 $\delta e=Be$。但实验所观察到的电子电荷应该不是固有电荷 e 而是 e_1，这样，我们可以将电子自能部分所产生的无穷大的电荷划入实验所观察到的电荷之内，这一重新定义电荷的过程叫做"电荷重整化"。

经过电荷重整化以后，由于电子自能部分所导致的无穷大就全部消去，而留下的只有以

$$S_{F_0}^{(2)}(p)=S_F(p)+\Sigma_F^{(2)}(p) \qquad (12.4-26)$$

去代替 $S_F(p)$，它对 S 矩阵元的修正是一微小的有限数值，这种有限的修正称为辐射修正。

综合上面结果，可以看到：由于考虑电子自能所引起的发散，可通过下面重整化消除，而留下有限辐射修正（至二次近似）

(1)质量重整化 $m\to m_0=m+\delta m$（有限的观察质量 m_0）

(2)电荷重整化 $e\to e_1=(1+B)e$（有限的观察电荷 e_1）。

(3)传播函数有限修正 $S_F\to S_{F_0}^{(2)}=S_F+\Sigma_F^{(2)}$（$\Sigma_F^{(2)}$ 是有限修正）。

§12.5　真空极化

1. 真空极化所产生的发散

最简单的光子自能图形如图12－8a 所示，它是由电磁场的作用而产生虚的正负电子对，随即又消灭掉。在一般情况下，如果有外电磁场存在时，这种虚的正负电子对被极化，很象电介质受外电场的作用产生极化一样。由于这个原因，图形 a 也常常称为真空极化图形，这种图形也可以作为较复杂图形的一部分而出现，如图12

—8b、c。

先讨论最简单的单个光子的问题。S 矩阵对这一现象的最低次近似的贡献由 $S^{(0)}$ 作出，在图形中只有一条光子线，下一次近似的贡献由 $S^{(2)}$ 作出，它的作用如图12—8a。引进符号 a_1 和 a_2

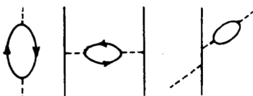


图 12—8

$$a_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2\omega_1}}; \qquad a_2 = \frac{e_2}{\sqrt{2\omega_2}}$$

那么与图 a 相应的矩阵元是

$$< f|S^{(2)}|i> = e^2(2\pi)^8\int d^4p'\, d^4p''(-1)Sp\{\hat{a}_2 S_F(p')\hat{a}_1 S_F(p'')\}$$
$$\cdot\,\delta(k_1 + p'' - p')\delta(p' - p'' - k_2) \quad (12.5-1)$$

将其中一个 δ 函数积分后，上式可写作：

$$< f|S^{(2)}|i> = \delta(k_1 - k_2)a_{2\mu}\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k_1)a_{1\nu} \quad (12.5-2)$$

其中
$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = e^2\int d^4p Sp\{\gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m_0}{p^2 + m_0^2}\gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m_0}{(p-k)^2 + m_0^2}\} \quad (12.5-3)$$

可以看出上式的积分是二次性发散的。

其次，我们讨论内光子线包含真空极化部分的情形。例如图12—9a 反映电子相互散射的最低次近似之一，图 b 则反映图 a 现象的较高近似之一。

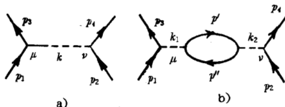


图 12—9

与图 a 相应的 S 矩阵元是

$$< f|S^{(2)}|i > = e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1\delta_{\mu\nu}D_F(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2' \cdot \delta(p_1 - k - p_3)\delta(p_2 + k - p_4) \tag{12.5-4}$$

与图 b 相应的矩阵元，可写成如下形式：

$$< f|S^{(4)}|i > = e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1 D_F(k)\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)D_F(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2 \cdot \delta(p_1 - k - p_3)\delta(p_2 + k - p_4) \tag{12.5-5}$$

因此，图 a 和图 b 的贡献的和就是

$$\left.\begin{aligned} < f|S^{(2)} + S^{(4)}|i > &= e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1 D_{F,\mu\nu}^{(2)}(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2 \\ &\quad\cdot \delta(p_1 - p_3 - k)\delta(k + p_2 - p_4) \\ \text{其中}\qquad D_{F,\mu\nu}^{(2)}(k) &= \delta_{\mu\nu}D_F(k) + D_F\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)D_F(k) \end{aligned}\right\} \tag{12.5-6}$$

比较可见，如果用 $D_{F,\mu\nu}^{(2)}(k)$ 代替(12.5 − 4)中的 $\delta_{\mu\nu}D_F(k)$，则可得到(12.5 − 6)式。这就是说，真空极化部分的作用就是代表内光子线的函数 $\delta_{\mu\nu}D_F(k)$ 修改成为 $D_{F\mu\nu}^{(2)}(k)$，这两个函数分别称为光子传播函数的零次近似和二次近似，由于 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 包含无穷大，那么 $D_{F_0\mu\nu}^{(2)}$ 也必然包含无穷大。

2. 真空极化所产生的电流

在讨论真空极化带给 S 矩阵的无穷大之前，我们研究一下由外电磁场 a_μ 所产生的真空极化电流及其所满足的条件。设 δa_μ 是由真空极化所产生的附加电磁场，并以 $a_\mu^{(2)}$ 代表修改以后反映外电磁场的因子，那么按照图 12−10 就有

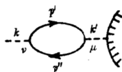


图 12—10

$$a_\mu^{(2)} = a_\mu + \delta a_\mu$$

及

$$\delta a_\mu = - e^2(2\pi)^8\int d^4p'\,d^4p''\,d^4k' \cdot D_F(k')Sp\{\gamma_\mu S_F(p')\gamma_\nu S_F(p'')\}a_\nu(k) \cdot \delta(k + p'' - p')\delta(k' + p'' - p') \tag{12.5-7}$$

利用(12.5－3)式可将上式写为

$$\delta a_\mu(k)=-\frac{i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2}\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)a_\nu(k)\qquad(12.5-8)$$

另一方面，麦克斯韦方程 $\Box A_\mu=-J_\mu$ 在动量表象中表示为

$$J_\mu(k)=k^2a_\mu(k)\qquad(12.5-9)$$

从(12.5－8)、(12.5－9)两式可求得真空极化电荷电流密度为

$$\delta J_\mu(k)=-\frac{i}{(2\pi)^4}\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)a_\nu(k)\qquad(12.5-10)$$

真空极化电荷必须满足电荷守恒定律（在动量表象）

$$k_\mu J_\mu(k)=0\qquad(12.5-11)$$

因此 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 必须满足（不论 $a_\nu(k)$ 取任何数值）

$$k_\mu\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)=0\qquad(12.5-12)$$

3. 无穷大的分割

电磁相互作用的规范不变性导致电荷守恒定律，因此要求 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 满足条件(12.5－12)。另一方面，从(12.5－2)式可以看出，$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 在罗仑兹变换中应该象一个二级张量，因为 S 矩阵元是罗仑兹不变的，而 $a_\mu a_\nu$ 又是一个二级张量。因此从(12.5－3)式看，$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 只能具有如下形式：

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)=k_\mu k_\nu Q(k^2)+\delta_{\mu\nu}P(k^2)\qquad(12.5-13)$$

以(12.5－13)代入(12.5－12)可得

$$k^2Q(k^2)+P(k^2)=0\qquad(12.5-14)$$

由(12.5－13)、(12.5－14)可得

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)=(k_\mu k_\nu-k^2\delta_{\mu\nu})Q(k^2)\qquad(12.5-15)$$

由上式可得

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k)=-3k^2Q(k^2)\qquad(12.5-16)$$

由(12.5－3)得

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k)=e^2\int d^4pSp\left\{\gamma_\mu\frac{i\hat{p}-m_0}{p^2+m_0^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m_0}{(p-k)^2+m_0^2}\right\}\qquad(12.5-16')$$

我们首先求 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0)$，当 $k\to0$ 时，由上式可得（应用公式 $\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu=-2\hat{A}$ 和 $\gamma_\mu\gamma_\mu=4$）

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0) = e^2\int d^4p Sp\{\frac{(-2i\hat{p} - 4m_0)(i\hat{p} - m_0)}{(p^2 + m_0^2)^2}\}$$

$$= 8e^2\int d^4p \frac{p^2 + 2m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^2} \qquad (12.5-17)$$

上式右方随着积分极限趋于无穷大可能是二次性发散，但是规范不变性要求

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0) = 0 \qquad (12.5-18)$$

这样(12.5—17)、(12.5—18)之间发生矛盾。其实，因(12.5—17)式的积分是发散的，因此，假使 p_μ 的四个积分极限趋于无穷大的方式不同，则所得到的结果可以完全不同。正确的计算方法应该选取 p_μ 的积分极限趋于无穷大的适当方式，使(12.5—18)式得到满足，以保证理论的规范不变性和内在的一致性。因此，我们利用(12.5—17)，可将 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k)$ 的表式写作

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = 8e^2\int d^4p\{\frac{p^2 - (pk) + 2m_0^2}{(p^2 + m_0^2)[(p-k)^2 + m_0^2]} - \frac{p^2 + 2m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^2}\} \qquad (12.5-19)$$

为了集中极点，可利用费曼公式，将上式改写。利用公式(12.3—5)，可将上式右方第一项改写成

$$8e^2\int d^4p\int_0^1 dx \frac{p^2 + 2m_0^2 - (pk)}{[(p - kx)^2 + q^2]^2}$$

$$q^2 = m_0^2 + k^2x(1-x)$$

将上式代换(12.5—19)中第一项，所得结果再利用公式(12.4—8)，得到

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = 8e^2\int d^4p(p^2 + 2m_0^2 - (pk))\int_0^1 dx\int_0^1 dz \frac{2[2(pk) - k^2]x}{[(p - kxz)^2 + l^2]^3}$$

$$l^2 = m_0^2 + k^2xz(1 - xz)$$

为化简上式，令 $y = xz$、$dy = xdz$，那么对 dx 积分后上式变成

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = 16e^2\int d^4p\int_0^1 dy(1-y) \frac{[p^2 + 2m_0^2 - (pk)][2(pk) - k^2]}{[(p - ky)^2 + l^2]^3} \qquad (12.5-20)$$

$$l^2 = m_0^2 + k^2 y(1-y)$$

为了积分方便，可移动对 d^4p 积分的原点。由于上式只有分子中～p^3的项是线性发散，积分原点移动后，积分值略有改变，而其它各项对数性发散，移动积分原点，不改变积分的数值。因此，当积分原点移动时，上式积分数值的改变与下式

$$16e^2\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)\frac{[(p-ky)^2+l^2]2(pk)}{[(p-ky)^2+l^2]^3}$$

$$= 32e^2\int d^4p\int_0^1 dy\frac{(1-y)(pk)}{[(p-ky)^2+l^2]^3}$$

在移动积分原点时数值的改变相等，利用(12.5－8)式可得到，当 $p-ky\to p$ 时，上式数值的改变为

$$32e^2\int_0^1 dy(1-y)\left(-\frac{i}{2}\pi^2k^2y\right) = -\frac{8}{3}ie^2\pi^2k^2$$

因此，可将(12.5－20)写成

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = -\frac{8}{3}ie^2\pi^2k^2 + 16e^2\int d^4p\int_0^1 dy\frac{(1-y)R}{(p^2+l^2)^3} \tag{12.5-21}$$

$$R = [(p+ky)^2-(p+ky)k+2m_0^2][2(p+ky)k-k^2]$$

考虑到(12.5－21)积分的对称性，R中p的奇次项的积分为零，故略去 R 中 p 的奇次项。(12.5－21)中的 R 可用 R′ 代替，

$$R' = (2y-1)[2(pk)^2+p^2k^2+k^2\cdot k^2y(y-1)+2m_0^2k^2]$$

再考虑(12.5－21)式中积分的对称性，可进一步将 R' 中的$(pk)^2 = p_\mu p_\nu k_\mu k_\nu$ 用$\frac{1}{4}p^2k^2$来代替。这可从下面展开式中看出

$$\begin{aligned}(pk)^2 &= p_\mu k_\mu p_\nu k_\nu \\ &= (p_1k_1+p_2k_2+p_3k_3+p_4k_4)(p_1k_1+p_2k_2+p_3k_3+p_4k_4) \\ &= (p_1^2k_1^2+p_2^2k_2^2+p_3^2k_3^2+p_4^2k_4^2)+(p_\mu\text{的奇次项})\end{aligned}$$

考虑到积分的对称性，p_μ的奇次项贡献为零。同时注意到 $p^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$ 以及 p_1、p_2、p_3、p_4 在积分中的等价地位，故可用$\frac{1}{4}p^2k^2$代替$(pk)^2$。于是 R' 可改写成

$$R'' = (2y - 1)k^2\left[\frac{3}{2}p^2 + k^2 y(y-1) + 2m_0^2\right]$$

(12.5 − 22)

另外，$$D_F^{-1}(k) = i(2\pi)^4 k^2 \qquad (12.5-23)$$

利用上面两式，可将(12.5−21)写成

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = D_F^{-1}(k)\left\{-\frac{2\alpha}{3\pi} - \frac{4i\alpha}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\cdot\frac{\frac{3}{2}p^2 + k^2y(y-1) + 2m_0^2}{(p^2+l^2)^3}\right\} \qquad (12.5-24)$$

从(12.5−16)式看出，可以将 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k)$ 展成为 k^2 的幂级数，亦即 $D_F^{-1}(k) = i(2\pi)^4k^2$ 的幂级数。由于(12.5−18)式展开后的常数项必等于零，因此可以假定

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) &= 3\{C\cdot D_F^{-1}(k) + \Pi_F^{(2)}(k^2)D_F^{-2}(k^2)D_F^{-2}(k)\}\\ &= D_F^{-1}\{3C + 3\Pi_F^{(2)}(k^2)D_F^{-1}(k)\}\end{aligned} \qquad (12.5-25)$$

其中3是为了以后方便计算而引入的。

比较上面两式，可求得 C 和 $\Pi_F^{(2)}(k^2)$。当 $k^2 = 0$ 时，(12.5−24)式大括号中的表式就等于 $3C$，故有

$$3C = -\frac{2\alpha}{3\pi} - \frac{4i\alpha}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\frac{\frac{3}{2}p^2 + 2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^3}$$

(12.5 − 27)

对 dy 进行积分，并将上式第二项的分子改写为

$$\frac{3}{2}p^2 + 2m_0^2 = \frac{3}{2}(p^2 + m_0^2) + \frac{1}{2}m_0^2 \qquad (12.5-28)$$

由(12.3−15)和(12.3−17)有

$$\int\frac{d^4p}{(p^2+m_0^2)^2} = i\pi D \quad 和 \quad \int\frac{d^4p}{(p^2+m_0^2)^3} = \frac{i\pi^2}{2m_0^2}$$

(12.5 − 29)

将上面两式代入(12.5−27)，得到

$$C = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(D + \frac{5}{6}\right) \qquad (12.5-30)$$

这是一个对数性发散量，它的表式见(12.3—16)。

由(121.5—25)可解出 $\Pi_\gamma^{(2)}(k^2)$

$$3D_\gamma^{-1}(k)\Pi_\gamma^{(2)}(k^2) = D_\gamma \Pi_{\mu\mu}^{(2)} - 3C$$

将(12.5—24)的 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}$ 和(12.5 — 27)的 3C 表式代入上式得

$$3D_\gamma^{-1}(k)\Pi_\gamma^{(2)}(k^2) = \frac{-4\pi i}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)$$

$$\left\{\frac{\frac{3}{2}p^2 + k^2y(y-1) + 2m_0^2}{(p^2+l^2)^3} - \frac{\frac{3}{2}p^2 + 2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^3}\right\}$$

(12.5 — 31)

令 $\alpha = p^2 + l^2, \beta = p^2 + m_0^2$ 　　有 $\alpha - \beta = k^2y(1-y)$

用公式 $\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}}$ 和 $D_\gamma^{-1} = i(2\pi)^4k^2$，则由(12.5—31)可得

$$\Pi_\gamma^{(2)}(k^2) = \frac{\alpha}{2\pi^7}\int d^4p\int_0^1 dy\cdot y(1-y)^2(2y-1)$$

$$\cdot\left\{\frac{2}{(p^2+l^2)^3} + \int_0^1 dz\frac{3(3p^2+4m_0^2)}{(p^2+l_1^2)^4}\right\}$$

(12.5 — 32)

$$l_1 = m_0^2 + k^2yz(1-y)$$

利用附录Ⅳ中公式(9)

$$i\int\frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}d^4k = \frac{i\pi^2}{a^{2(n-m)}}\frac{(m-1)!(n-m-1)!}{(n-1)!}$$

将(12.5—3)对 d^4p 积分后得

$$\Pi_\gamma^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{24\pi^5}\int_0^1 dy\cdot y(1-y)^2(2y-1)\left\{\frac{1}{l_2} + \int_0^1 dz\left(\frac{3}{l_1^2} + \frac{2m_0^2}{l_1^4}\right)\right\}$$

(12.5 — 33)

再对 dz 积分得

$$\Pi_\gamma^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{24\pi^5}\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\left\{\frac{3y(1-y)}{l^2} + \frac{3}{k^2}\ln\left(\frac{l^2}{m_0^2}\right)\right\}$$

(12.5 — 34)

将上式第二项进行分部积分，并利用 $dl^2 = k^2(1-2y)dy$，可以得到

$$\frac{3}{k^2}\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\ln(\frac{l^2}{m_0^2}) = \frac{3}{k^2}\int_0^1 \ln\frac{l^2}{m_0^2}d(-\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2-y)$$

$$=\frac{3}{k^2}\{[\ln(\frac{l^2}{m_0^2})(-\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2-y)]|_{y=0}^1$$

$$-\int[-\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2-y]d\ln(\frac{l^2}{m_0^2})\}$$

$$=3\int(2y-1)(-\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2-y)\frac{1}{l^2}dy$$

$$=\int dy(2y-1)3y(-\frac{2}{3}y^2+\frac{3}{2}y-1)\frac{1}{l^2}$$

将上式代入(12.5－34)与其中第一项合并后得

$$\Pi_P^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{24\pi^5}\int_0^1 dy(2y-1)3y[(1-y)^2-\frac{2}{3}y^2+\frac{3}{2}y-1]\frac{1}{l^2}$$

$$=\frac{i\alpha}{24\pi^5}\frac{1}{2}\int_0^1 dy y^2(2y-1)(2y-3)\frac{1}{l^2}$$

$$=\frac{2i\alpha}{3(2\pi)^5}\int_0^1 dy\frac{y^2(2y-1)(2y-3)}{m_0^2+k^2y(1-y)} \qquad (12.5-35)$$

上式的数值是有限的，对 dy 积分后得到 $\Pi_P^{(2)}(k^2)$的显示式。

4.光子传播函数的二次近似

可以证明，(12.5－15)式右方与 $k_\mu k_\nu$ 成比例的一项对 S 矩阵无贡献。为了简单起见，我们只证明代表真空极化的图12－7a 是处于外光子线上的情况。

根据(12.5－8)和(12.5－15)式

$$\delta a_\mu = D_F(k)Q(k^2)(k_\mu k_\nu - k^2\delta_{\mu\nu})a_\nu(k)$$

考虑到动量表象中的洛仑兹条件 $k_\nu a_\nu = 0$，可见与 $k_\mu k_\nu$ 成比例的一项对于 S 矩阵元不作贡献，这个结论也适用于真空极化图形处在内光子线的情形。于是可将(12.5－15)式写为

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -\delta_{\mu\nu}k^2Q(k^2) \qquad (12.5-36)$$

从(12.5－16)、(12.5－25)和上式可得

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \delta_{\mu\nu}\{CD_F^{-1}(k) + \Pi_P^{(2)}(k^2)D_F^{-2}(k)\} \qquad (12.5-37)$$

将上式代入(12.5－6)式得

$$D_{F,\mu\nu}^{(2)}(k) = \delta_{\mu\nu}(1 + C)D_F(k) + \delta_{\mu\nu}\Pi_F^{(2)}(k)$$

$$(12.5-38)$$

因为我们的讨论只限于二次近似，故可将上式改写为

$$D_{F,\mu\nu}^{(2)}(k) = \delta_{\mu\nu}(1 + C)\{D_F(k) + \Pi_F^{(2)}(k)\}$$

$$(12.5-39)$$

这就是我们所要求的光子传播函数的二次近似的表式。

根据(12.5—8)和(12.5—37)式，并考虑到对于自由光子有 $k^2 = 0$，立即可得真空极化对外光子线的影响是将 $a_\mu(k)$ 修改为

$$a_\mu^{(2)}(k) = a_\mu(k) + CD_F(k)D_F^{-1}(k)a_\mu(k)$$

$$(12.5-40)$$

上式的表示是不定的，假使 $D_F^{-1}(k)$ 先作用于 $a_\mu(k)$ 上得

$$a_\mu^{(2)}(k) = a_\mu(k)$$

假使 $D_F^{-1}(k)$ 先作用于 $D_F(k)$ 就得

$$a_\mu^{(2)}(k) = (1 + C)a_\mu(k)$$

类似电子线的情况，$a_\mu^{(2)}(k)$ 应该取上二式的几何平均值

$$a_\mu^{(2)}(k) = \sqrt{1 + C}a_\mu(k) \qquad (12.5-41)$$

5. 真空极化导致的电荷重整化

由于 C 是对数性发散的，使得真空极化带给 S 矩阵元无穷大的修正可归结为：

(1)以

$$D_{FR}^{(2)}(k) = D_F(k) + \Pi_F^{(2)}(k) \qquad (12.5-42)$$

代替 $D_F(k)$ 去反映内光子线，外光子线仍以 $a_\mu(k)$ 去反映；

(2)此外，每一条内光子线贡献一个因子 $(1+C)$，每一条外光子线贡献一个因子 $\sqrt{1+C}$。

今设费曼图有 n 个顶角、P_i 条内光子线和 P_e 条外光子线，则有 $2P_i + P_e = n$，而 S 矩阵元的表示中必定有一个因子 e^n。此外，由于真空板化的第二部分效应，内外光子线合并起来贡献一个因子：

$$(1 + C)^{P_i + \frac{1}{2}P_e} = (1 + C)^{\frac{n}{2}}$$

因此把这个因子和 e^n 合并起来也就等于以

$$e_2 = \sqrt{1+C}e \qquad (12.5-43)$$

去代替 e。假使令 e_2取电子电荷的有限的实验数值，那末就可消去真空极化导致的无穷大。经过电荷重整化后只留下(12.5—42)式中的 $D_{F_0}^{(2)}(k)$ 去代替 S 矩阵元中的 $D_F(k)$修正。这种修正称为真空极化导致的辐射修正，它常常是微小的数值。

§12.6 顶角部分

1. 顶角函数的二次近似

在 S 矩阵中常见的顶角部分如图12—11a 所示，物理上代表电子为电磁场所散射。这一现象的下一次近似可用图 b 代表。与图 a 相应的矩阵元是

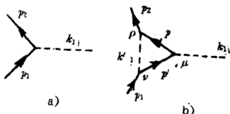


图 12—11

$$< f|S^{(1)}|i > = \bar{u}_2(p_2)[-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p_2-p_1-k_1)]\cdot u_1(p_1)a_\mu(k) \qquad (12.6-1)$$

与图 b 相应的矩阵元也可表示为

$$< f|S^{(3)}|i > = -e(2\pi)^4\delta(p_2-p_1-k_1)\cdot\bar{u}_2(p_2)\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)u_1(p_1)a_\mu(k_1) \qquad (12.6-2)$$

其中

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\gamma_\nu\frac{i(\hat{p}_2-\hat{k})-m_0}{(p_2-k)^2+m_0^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m_0}{(p_1-k)^2+m_0^2}\gamma_\nu \qquad (12.6-3)$$

因此图 b 对 S 矩阵元的贡献就相当于将代表顶角的 γ_μ 加以修正，即以

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) \qquad (12.6-4)$$

代替 γ_μ。由(12.6—3)式可以看出 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 是对数性发散的。由于图 b 也可以出现在一个更复杂的图形中,成为其中一部分，因此，

有必要对 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 的发散性质进一步研究，并把其中的无穷大分割出来。为此，我们可用类似处理电子自能的方法进行。

由(11.3—7)和(11.3—8)可得 γ 矩阵的如下公式：

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = -2\gamma_\mu,\\&\gamma_\nu\hat{A}\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\nu\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\nu = 4A_\mu\\&\gamma_\nu\hat{A}\gamma_\mu\hat{B}\gamma_\nu = -2\hat{B}\gamma_\mu\hat{A}\end{aligned}\right\}\qquad(12.6-5)$$

利用上式将(12.6—3)中 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 的分子简化，即

$$\begin{aligned}&\gamma_\nu[i(\hat{p}_2-\hat{k})-m_0]\gamma_\mu[i(\hat{p}_1-\hat{k})-m_0]\gamma_\nu\\&=-\gamma_\nu(\hat{p}_2-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_1-k)\gamma_\nu-im_0\gamma_\nu(\hat{p}_2-\hat{k})\gamma_\mu\gamma_\nu\\&\quad-im_0\gamma_\nu\gamma_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\nu+m_0^2\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\\&=2[(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{k})-2im_0(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2k_\mu)-m_0^2\gamma_\mu]\end{aligned}$$

$$(12.6-6)$$

利用费曼公式(12.3—5)，可将 $\Lambda_\mu^{(2)}$ 积分号内的分母改写，令

$$a_1=(p_2-k)^2+m_0^2,\quad a_2=(p_1-k)^2+m_0^2,\quad a_3=k^2$$

则

$$\frac{1}{k^2[(p_2-k)^2+m_0^2](p_1-k)^2+m_0}=(3-1)!\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y$$

$$\cdot\frac{1}{\{[(p_2-k)^2+m_0^2]y+[(p_1-k)^2+m_0^2](x-y)+k^2(1-x)\}^3}$$

$$(12.6-7)$$

注意到 $p_1^2=p_2^2=-m^2$、$k^2=0$ 和 $p_2-p_1=k_1$，上式分母中大括号等于

$$2(p_1-p_2)ky-2p_1kx+k^2\qquad(12.6-8)$$

可以直接展开验证恒等式

$$\begin{aligned}2(p_1-p_2)ky-2p_1kx+k^2&=[(k-px-k_1y)^2+q^2]\\q^2=m_0^2x+p_1^2x+k_1(p_1+p_2)y&-(k_1y+p_1x)^2\end{aligned}$$

$$(12.6-9)$$

将(12.6—6)—(12.6—9)等关系式代入(12.6—3)中得

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y$$

$$\cdot \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{k}) - 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2k_\mu) - m_0^2\gamma_\mu}{\{(k - p_1x - k_1y)^2 + q^2\}^3}$$

$$(12.6-10)$$

为了化简上式，可移动积分原点。由于上式积分是对数性发散，移动积分原点不改变积分的数值，于是当 $k \to k + p_1x + k_1y$ 时，上式变成

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy \frac{T}{(k^2+q^2)^3} \qquad (12.6-11)$$

$$T = [\hat{p}_1(1-x) - \hat{k}_1y - \hat{k}]\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{p}_1x - \hat{k}_1y - \hat{k}) - m_0^2\gamma_\mu$$
$$- 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2p_{1\mu}x - 2k_{1\mu}y - 2k_\mu)$$

由于对 d^4k 积分的对称性，T 中 k 的奇次项对积分的贡献等于零，可以略去，而 k_1^2、k_2^2、k_3^2 和 k_4^2 对积分的贡献相当于 $\frac{k^2}{4}$ 对积分的贡献。再利用关系式 $\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = -2\gamma_\mu$，$T$ 可换成 T'

$$T' = [\hat{p}_1(1-x) - \hat{k}_1y]\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{p}_1x - \hat{k}_1y) - \frac{1}{2}k^2\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu$$
$$- 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2p_{1\mu}x - 2k_{1\mu}y) \qquad (12.6-12)$$

其中利用了下列关系式

$$\hat{k}\gamma_\mu\hat{k} = \hat{k}k_\nu(2\delta_{\nu\mu} - \gamma_\nu\gamma_\mu) = 2\hat{k}k_\mu - k^2\gamma_\mu$$

由于 $2\hat{k}k_\mu = 2k_\rho\gamma_\rho k_\mu$，当 $\rho \neq \mu$ 时 k_μ 为奇数，对积分没有贡献，可略去，而只留 $\rho = \mu$ 的项。因此，$2\hat{k}k_\mu$ 对积分的贡献相当于 $2k_\mu^2\gamma_\mu$（μ 不取和）对积分的贡献，而 $\hat{k}\gamma_\mu\hat{k}$ 对积分的贡献相当于 $-\frac{1}{2}k^2\gamma_\mu$ 对积分的贡献。

我们先讨论一个电子通过电磁场但没有被电磁场散射的情况，这时有

$$p_1 = p_2 = p$$
$$k_1 = p_2 - p_1 = 0 \qquad (12.6-13)$$

这种情况下，T' 简化为

$$T' = (1-x)^2\hat{p}\gamma_\mu\hat{p} - \frac{1}{2}k^2\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu$$
$$- 2im_0(1-x)[\gamma_\mu, \hat{p}]_+ \qquad (12.6-14)$$

从(12.6－2)可看出，$\Lambda_\mu^{(2)}(p,p)$一方面向右作用于$u(p)$，另一方面，又向左作用于$\bar{u}(p)$，利用

$$(i\hat{p}+m_0)u(p)=0 \text{ 和 } \bar{u}(p)(i\hat{p}+m_0)=0$$

将(12.6－14)中的$\hat{p}$用im_0代替，可得

$$T'=\gamma_\mu\left[m_0^2\left(2-2x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}(k^2+m_0^2x^2)\right] \tag{12.6-15}$$

同时q^2简化为

$$q^2=m_0^2x^2 \tag{12.6-16}$$

将T'、q^2代入(12.6－11)式($T=T'$)得

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p,p)=L\gamma_\mu \tag{12.5-17}$$

$$\text{其中}L=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\frac{\left[m_0^2\left(2-2x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}(k^2+m_0^2x^2)\right]}{(k^2+m_0^2x^2)^3}$$
$$=\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 dx x\left[\frac{m_0^2(4-4x-x^2)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}-\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2}\right] \tag{12.6-18}$$

上式第二项是一个对数性发散积分，可利用对dx的分部积分得

$$\int_0^1\frac{xdx}{(k^2+m_0^2x^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2}+\int_0^1\frac{2m_0^2x^3dx}{(k^2+m_0^2x^2)^3} \tag{12.6-19}$$

将上式代入(12.6－18)并应用(12.3－16)得

$$L=\frac{\alpha D}{4\pi}+\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 xdx\frac{m_0^2(4-4x-3x^2)}{(k^2+m_0^2x^2)^3} \tag{12.6-20}$$

因上式是收敛积分，可对调积分顺序，先对d^4k积分。利用(12.3－18)，上式第二项写成

$$\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 xdx\frac{m_0^2(4-4x-3x^2)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}=-\frac{\alpha}{4\pi}\left[4\int_0^1\frac{dx}{x}-\frac{11}{2}\right]$$

将上式代入(12.6－20)得

$$L=\frac{\alpha}{4\pi}\left(D-4\int_0^1\frac{dx}{x}+\frac{11}{2}\right) \tag{12.6-21}$$

可见，L 包含的无穷大分为两部分：其一是 D，随 k 的积分上限趋于无穷大的对数性紫外发散，它是来源于场的无穷多自由度；另一部分是上式的第二项，随 x 的下限趋于零而对数性红外发散，它是由于计算方法不恰当而导致的，不是基本困难。

所以，对上述电子通过电磁场而未被散射的简单情况，其图12—10b 顶角部分的作用归结为以 $(1+L)\gamma_\mu$ 代替 γ_μ，即以

$$-(1+L)e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(\sum p) \qquad (12.6-22)$$

代替 $-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(\sum p)$ 反映费曼图中的顶角部分。或者归结为用重整化后的电荷

$$e_3=(1+L)e \qquad (12.6-23)$$

代原来电荷 e。经过电荷重整化后，上述简单物理现象便不再包含无穷大了。

下面我们讨论一般情况，即图12—10b 作为更复杂图形的一部分而出现时所导致的结果。这时 $\hat{p}$ 未必能用 im_0 代替，因而 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 也未必等于 $L\gamma_\mu$。我们令

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)=L\gamma_\mu+\Lambda_{\mu F}^{(2)}(p_1,p_2) \qquad (12.6-24)$$

即

$$\Lambda_{\mu F}^{(2)}(p_1,p_2)=\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)-L\gamma_\mu \qquad (12.6-25)$$

由(12.6—18)式有

$$L=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{m_0^2(2-2x-x^2)-\frac{1}{2}k^2}{(k^2+m_0^2x^2)^3}$$

将上式代入前式，并用(12.6—11)、(12.6—12)得

$$\Lambda_{\mu F}^{(2)}(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\left\{\frac{T'}{(k^2+q^2)^3}-\frac{\gamma_\mu\left[m_0^2(2-2x-x^2)-\frac{k^2}{2}\right]}{(k^2+m_0^2x^2)^3}\right\} \qquad (12.6-26)$$

T' 由(12.6—12)表示，q^2 由(12.6 — 9) 表示。可将 $\Lambda_{\mu F}^{(2)}(p_1,p_2)$写成

$$\Lambda_{\mu F}^{(2)}(p_1,p_2)=\lambda_1+\lambda_2 \qquad (12.6-27)$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\left\{\frac{Y}{(k^2+q^2)^3} - \frac{\gamma_\mu m_0^2\left(2-2x-\frac{x^2}{2}\right)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}\right\}$$

(12.6 − 28)

$$Y = [\hat{p}_1(1-x) - \hat{k}_1 y]\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 x - \hat{k}y) + \frac{1}{2}q^2\gamma_\mu$$

$$- m_0^2\gamma_\mu - 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2p_{1\mu}x + 2\hat{k}_1 y)$$

$$\lambda_2 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\left\{\frac{\gamma_\mu}{2}\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2} - \frac{\gamma_\mu}{2}\frac{1}{(k^2+q^2)^2}\right\}$$

(12.6 − 29)

利用(12.6−6)可将上式改写成

$$\lambda_2 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^1 dz$$

$$\cdot\gamma_\mu\frac{m_0^2x(1-x) + p_1^2x + k_1(p_1+p_2)y - (k_1y+p_1x)^2}{\{k^2 + zm_0^2x^2 + q^2(1-z)\}^3}$$

(12.6 − 30)

可见 λ_1 和 λ_2 对 d^4k 的积分都是收敛的，因此 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 对 d^4k 的积分是收敛的，它除包含红外发散外，不再含有其它无穷大。

2. 顶角部分所导致的电荷重整化

将(12.6−24)代入(12.6−4)得到

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = (1+L)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) \quad (12.6-31)$$

可见，在一般情况下，顶角部分的作用在于将 S 矩阵元中的顶角因子 γ_μ 用 $\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$来代替。

假使讨论的只限于二次近似，则可以将上式写为

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = (1+L)\{\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)\}$$

(12.6 − 32)

上式中的无穷大常数 L 可用电荷重整化将它分开出去，因此上述的顶角部分对于 S 矩阵元的修正可以归结为

(1)以

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) \qquad (12.6-33)$$

去代替 S 矩阵中反映顶角的因子 γ_μ；

(2)以

$$e_3 = (1 + L)e \qquad (12.6-34)$$

去代替 S 矩阵元中的固有电荷 e，并令 e_3 等于实验观察到的电子电荷。这样经过电荷重整化以后顶角部分对 S 矩阵的无穷大贡献就被消去，只留下包含在(12.6－33)式中的有限修正 $\Lambda^{2}_{\mu F}(p_1, p_2)$，这种修正叫做顶角部分带来的辐射修正，常常是微小的。

3.小结

在以上诸节，我们讨论了二次近似的辐射修正，所得到的结果精确到与 e^2成比例的项。该方法可归纳为二部分：

(1)以 $S^{(2)}_{F_0}(p)$ 代替 $S_F(p)$ 反映内电子线，以 $D^{(2)}_{F_0}(k)$ 代替 $D_F(k)$ 反映内光子线，以 $\Gamma^{(2)}_{\mu_0}(p_1, p_2)$ 代替 γ_μ 反映顶角；

(2)以 $m_0 = m + \delta m$ 代替 m，以

$$e_0 = (1 + B)\sqrt{1 + C}(1 + L)e \qquad (12.6-35)$$

代替 e，并令 S 矩阵元中的 m_0 和 e_0 等于有限的实验数值。经过重整化后，由电子自能部分，真空极化部分和顶角部分所带来的无穷大就全部消去，留下的只是微小的辐射修正。

由于 B、C、L 都与 e^2 成正比，且 $B = -L$，可以将(12.6－35)式右方展成 e 的幂级数，略去 $e^{n\geq 4}$的项，可得

$$e_0 = (1 + \frac{1}{2}C)e$$

这样，由于 $B = -L$，电子自能部分和顶角部分所导致的电荷重整化的效应恰好相互抵消，留下的只是真空极化所导致的电荷重整化效应，这一规律对于更高次的近似也成立。

上述重整化理论得到一些实验(如电子反常磁矩实验和氢原子能级的 Lamb 移动)的检验，结果符合得很好。

§12.7　重整化一般理论

1.原始发散

现在我们讨论所有高次近似重整化方法，首先我们来研究对

于任意一个图形，如何检验与它相应的 S 矩阵元是否发散的问题。

我们知道，紫外发散的来源是由于对内费米线和内光子线的动量 p_i 和 k_i 积分的区域为无穷大而产生的，假使有一个费曼图形有 n 个顶角，E_i 条内电子线及 P_i 条内光子线，那末在 S 矩阵元中和它们相对应的与内部动量有关的因子有：

(1) 与 n 个顶角相对应的有 n 个 $\delta(\sum p)$ 的因子；

(2) 与 E_i 条内电子相对应的有 E_i 个 $\int d^4p_i \frac{i\hat{p}_i - m}{p_i^2 + m^2}$ 的因子；

(3) 与 P_i 条内光子线相对应的有 P_i 个 $\int d^4k_i \frac{1}{k_i^2}$ 的因子。

因此，从矩阵元素表式中分子与分母的内部动量(p_i 和 k_i)的幂次的差可初步估计这个积分是否发散。显然，分母是内部动量的 $2(E_i + P_i)$ 次函数。而在分子中有 n 个 $\delta(\Sigma p)$ 函数，除有一个 $\delta(\Sigma p)$ 留下代表总过程的动量守恒和能量守恒之外，其余 $(n-1)$ 个 $\delta(\Sigma p)$ 可以用来消去对 d^4p_i 或 d^4k_i 的 $(n-1)$ 重积分。即是说使原来对内部动量的 $4(E_i + P_i)$ 重积分约化为 $4(E_i + P_i - n + 1)$ 重积分。再考虑到每一条内电子线的分子还有一个 p_i 的一次函数，因此分子中内部动量的幂次为 $\{4(E_i + P_i - n + 1) + E_i\}$ 的一次函数。假使分子与分母的内部动量幂次之差

$$K = \{4(E_i + P_i - n + 1) + E_i\} - 2(E_i + P_i) \geqslant 0 \tag{12.7-1}$$

那么积分可能是发散的。考虑到图形中如果有 E_e 条外电子线和 P_e 条外光子线，则我们有

$$\left.\begin{aligned} n &= 2P_i + P_e \\ 2n &= 2E_i + E_e \end{aligned}\right\} \tag{12.7-2}$$

于是可将(12.7—1)写成

$$K = 4 - \frac{3}{2}E_e - P_e \geqslant 0 \tag{12.7-3}$$

必须注意(12.7—3)式的结果是从外粒子线来估计积分发散的情况，但是即使外粒子线相同的图形，其内部图形可以是多种多

样的，这样就有许多图形不满足(12.7—3)式，但其矩阵元也是发散的。例如图12—12a是康普顿散射$S^{(4)}$的一个图形，对于这个图形的$K=-1<0$，它不满足(12.7—3)式，但这个图形中包含有电子自能部分，

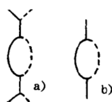


图 12—12

其相应矩阵元显然是发散的，象这样的发散图形一般地可将其导致发散的基本部分割开出来，如图12—12b所示。对于这个基本部分只有2条外电子线，因此$K=1>0$，它就满足(12.7—3)式。为了利用(12.7—3)式作为估计积分的发散情况，我们引进原始发散图形的定义：假如某一个图形的矩阵元中，令任何一个内动量取一定的数值而不对它进行积分就得到收敛的结果，则这个图形就叫做原始发散图形。也可以用另一个完全等效的定义：假如有一个发散图形，当把它的任何一条内部线割断使之成为二条外部线便变成一个收敛的图形，那么这样的发散图形就是原始发散图形。图12—12b就是原始发散图形。对于原始发散图形可利用(12.7—3)式作为估计积分发散的情况，对于其它非原始的发散图形，不论它是否满足(12.7—3)式，我们都可把它分解或约化为原始发散图形来进行分析。以后把(12.7—3)式作为原始发散图形所必须服从的条件。

应该特别注意，条件(12.7—3)中的K值与顶角数目n无关，而只与外粒子线的数目有关，因而导致原始发散的种类只可能是有限几类，这样就可能利用调整有限个常数来达到消除发散的目的，这正是在量子电动力学里利用调整电子的质量及电荷来消除发散取得成功的重要条件之一。反之，在某一种量子场理论中(例如，费米相互作用，π—N导数耦合等)，如果(12.7—3)式中的K值随顶角数目n而增加，那末原始发散将会有无限多种，我们也就无法利用调整有限多个常数来消除无限多种的发散。因此，在这些量子场理论中重整化方法不适用。

由以上的讨论，我们可根据(12.7—3)式把量子电动力学里可能的原始发散的种类列举如下：

(1)$E_e=2$，　$P_e=1$　顶角部分

(2)$E_e=2$，　$P_e=0$　电子自能

(3)$E_e=0$，　$P_e=2$　光子自能

(4)$E_e=0$，　$P_e=0$　真空起伏(如图 12－13a)

(5)$E_e=0$，　$P_e=1$　及 $E_e=0$，　$P_e=3$ 分别相应于图 12－13b 及 c。

(6)$E_e=0$，　$P_e=4$　光子与光子相互散射，如图 12－13d。

但是，属于第(4)类的真空起伏只引起态矢量的位相改变，可以不讨论。属于第(5)类的，根据法雷定理对 S 矩阵元的贡献为零，故这一类实际上是不发散的。至于第(6)类的光子相互散射，由于规范不变性，它对 S 矩阵元的贡献也是收敛的*。因此，在量子电动力学中的原始发散图形，实际上只有电子自能，光子自能和顶角部分三类。

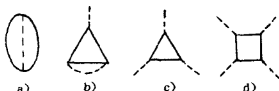


图 12—13

2. 不可约化图形

由于各种图形可以具有复杂的结构(如图 12—14a,b,c)，为了分析方便起见，我们从最简单的开始，并引进'图形骨架'的概念：有一个图形 A，假使将 A 内部所包含的一切电子自能，真空极化和顶角部分略去，分别代以简单的电子线、光子线和顶角，如此得到另外一个图形 A'，则称图形 A' 为"图形 A 的骨架"。图 12－14a′、b′、c′ 就是图 a、b、c、的骨架。

如果有一个图形与它的骨架完全一样，则这个图形称为不可约化的图形，否则称为可约化的图形。显然，不可约化的电子自能和真空极化的图形都只有一种，但不可约化的顶角部分则有很多类型。由于一切发散图形都可分解为原始发散图形，而原始发散图

* 较简洁的证明可阅 Hamilton(1959)的书

形又可分解或约化为不可约化的原始发散图形，因此分析发散困难的第一步应该是研究不可约化的原始发散图形。

可以看出，条件(12.7－3)中的 K 代表了不可约化的原始发散图形的最高发散程度。当 $K=0$、1 或 2 时，最高发散度分别是对数性、线性或二次性。实际上，由于理论的对称性，发散程度常常不到 K。例如，真空极化图形的 $K=2$，但由于理论的规范不变性和罗仑兹不变性，结果是对数性发散。自能图形的 $K=1$，但由于积分的对称性，分子中与 $\hat{k}$ 成正比的项不作贡献，结果也是对数性的。顶角部分的 $K=0$，其发散度最高就是对数性的，因此在量子电动力学中所出现的发散都是对数性的。

可以利用二级近似中所用的办法，将不可约化的原始发散图形中的无穷大分出来，令：

$$
\begin{aligned}
\Sigma(W,p) &= -i(2\pi)^4\delta m(W) + B(W)S_F^{-1}(p) \\
&\quad + \Sigma_F(W,p)S_F^{-2}(p) \\
\Pi_{\mu\nu}(U,k) &= \delta_{\mu\nu}C(U)D_F^{-1}(K) + \delta_{\mu\nu}\Pi_F(U,k)D_F^{-2}(k) \\
\Lambda_\mu(V,p_1,p_2) &= L(V)\gamma_\mu + \Lambda_{\mu F}(V,p_1,p_2)
\end{aligned}
\tag{12.7-4}
$$

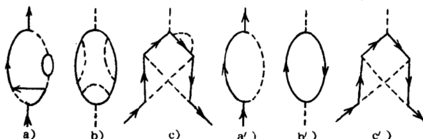


图 12—14

其中 W、U 和 V 分别表示不可约化的电子自能、光子自能和顶角部分的图形，$\delta m(W)$，$B(W)$，$C(U)$ 和 $L(V)$ 都是与各该图形相应的对数性发散常数，$\Sigma_F(W,p)$，$\Pi_F(U,K)$ 和 $\Lambda_{\mu F}(V,p_1,p_2)$ 都是收敛函数，因为不可约化的自能图形只有一种，故(12.7－4)式中的第一式和第二式分别是(12.4－6)式和(12.5－37)。至于不可约化的顶角图形却有很多种类，但对于不可约化的顶角图形都可分解

成(12.7－4)式中第三式右方的表式。

3. **可约化图形**

下面进一步讨论可以约化的电子自能部分、真空极化部分和顶角部分所导致的辐射修正，这样才可能得到包括所有辐射修正的电子传播函数 $S'_{F0}(p)$、光子传播函数 $D'_{F0}(k)$ 和顶角函数 $\Gamma_{\mu 0}(p_1,p_2)$。

为了避免某些图形的贡献过多次数地包括进计算中去，我们引进'正规图形'的概念：假使割断某一个图形中的某一条内部电子线或内部光子线，则将图形分解为不相连接的两个部分，这种图形叫做'非正规图形'。与此相反，如果割断任一条内部线都不能将图形分解为不相连接的两个部分，那么，这个图形就叫正规图形。图12－15a、b是正规图形，而图c、d是非正规图形。

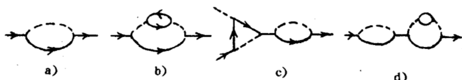


图 12－15

假使我们令 $S'_{F0}(p)$ 或 $D'_{F0}(p)$ 中包括正规和非正规的电子自能图形或光子自能图形的贡献，但是令 $\Gamma_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 中只包括正规顶角图形的贡献，那末利用这三个函数就能将可以约化的有贡献的正规图形正确地考虑进去。

我们令 $\Sigma(p)$ 代表包括所有正规和非正规的图形在无穷大没有分出以前的矩阵表式

$$\Sigma(p) = \sum_W \Sigma(W,p) \qquad (12.7-5)$$

令 $S'_F(P)$ 代表包括所有电子自能的贡献，但是无穷大还没有分出去的电子传播函数，则

$$S'_F(p) = S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) \qquad (12.7-6)$$

可以将 $S'_F(p)$ 只用正规电子自能图形的贡献表达出来，令 $\Sigma^*(p)$ 代表包括所有正规电子自能图形 W_r 的贡献(但不包括非正规

电子自能图形)：

$$\Sigma^*(p) = \sum_{W_r} \Sigma(W_r, p) \qquad (12.7-7)$$

则 $S'_F(p)$ 满足下列方程

$$\left.\begin{aligned} S'_F(p) &= S_F(p) + S'_F(p)\Sigma^*(p)S_F(p) \\ S'_F(p) &= S_F(p) + S_F(p)\Sigma^*(p)S'_F(p) \end{aligned}\right\} \qquad (12.7-8)$$

知道了 $\Sigma^*(p)$，就可以从上式解得 $S'_F(p)$：

$$S_F^{-1}(p) - S'^{-1}_F(p) = \Sigma^*(p)$$

类似地，我们容易写出关于光子自能的 $\Pi(k)$、$D'_F(k)$ 和 $\Pi^*(k)$ 等表示。

至于顶角部分，我们令 V_r 表示正规顶角图形，$\Lambda_\mu(V_r, p_1, p_2)$ 为相应的顶角矩阵，那末与所有正规顶角图形相应的顶角矩阵的总和为

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2) = \sum_{V_r} \Lambda_\mu(V_r, p_1, p_2) \qquad (12.7-9)$$

令 $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ 代表无穷大还没有分割出去的全部顶角函数，那末

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) \qquad (12.7-10)$$

现在的问题是，如何计算 $\Sigma^*(p)$，$\Pi^*(k)$ 和 $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$；如何将其中无穷大分割出来，得到有限的辐射修正 $\Sigma_F^*(p)$、$\Pi_F^*(k)$ 和 $\Lambda_{\mu F}(p_1, p_2)$；如何证明这些无穷大分割出来，并将它们抛去就相当于质量重整化和电荷重整化。

我们可用逐步近似法来解决这一问题。这种方法的要点如下：给出一定的方法，在这些表式的 n 次以及更低次近似的基础上，求出这些表式的第 $(n+1)$ 次近似，亦即从精确到 e^{2n} 项的表式求得精确到 $e^{2(n+1)}$ 的项的各种表式，这样就能在最后求得 $\Sigma_F^*(p)$、$\Pi_F^*(k)$、$\Lambda_{\mu F}(p_1, p_2)$，以及 $S'_{F0}(p)$，$D'_{F0}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu0}(p_1, p_2)$ 的精确表式。

4. 华德恒等式

在具体计算中，对于顶角部分遇到较少麻烦，但是对于电子自能部分(或光子自能部分)可以遇到交缠无穷大，如图12－16所示。将这



电子自能的交缠无穷大

图 12－16

种交缠无穷大分割出去是一件很复杂的工作。华德(Ward,1950)曾指出了如何避免这一困难的方法，就是把电子自能部分和顶角部分连系起来，通过顶角部分的 $\Lambda_\mu(p,p)$ 的表式直接求得 $\Sigma^*(p)$ 的表式。

由 $S_F(p)$ 的定义

$$S_F(p)=\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$

对 p_μ 微商可得(略去 $i\varepsilon$ 不写)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\mu}S_F(p)&=\frac{i}{(2\pi)^4}\left(\frac{i\gamma_\mu}{p^2+m^2}-\frac{2p_\mu(i\hat{p}-m)}{(p^2+m^2)^2}\right)\\&=\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\gamma_\mu(p^2+m^2)-2p_\mu(i\hat{p}-m)}{(p^2+m^2)^2}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(2\pi)^4S_F\gamma_\mu S_F&=\frac{-1}{(2\pi)^4}\frac{(i\hat{p}-m)\gamma_\mu(i\hat{p}-m)}{(p^2+m^2)^2}\\&=\frac{-1}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\mu(p^2+m^2)-2p_\mu(i\hat{p}-m)}{(p^2+m^2)^2}\end{aligned}$$

最后一步用了 $\gamma_\mu\hat{p}=2p_\mu-\hat{p}\gamma_\mu$

对比上面两式结果得到

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}S_F(p)=(2\pi)^4S_F(p)\gamma_\mu S_F(p)\qquad(12.7-11)$$

利用这个公式我们可将电子自能部分与顶角部分连系起来，就以电子自能的二次近似而论，由 § 12.3我们有

$$\left.\begin{aligned}S_F^{(2)}(p)&=S_F(p)\Sigma^{(2)}(p)S_F(p)\\\Sigma^{(2)}(p)&=e^2(2\pi)^8\int d^4k'\,D_F(k')\gamma_\nu S_F(p-k')\gamma_\nu\end{aligned}\right\}\qquad(12.7-12)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu}&=e^2(2\pi)^8\int d^4k'\,D_F(k')\gamma_\nu\frac{\partial S_F(p-k')}{\partial p_\mu}\gamma_\nu\\&=e^2(2\pi)^8\int d^4k'\,D_F(k')\gamma_\nu(2\pi)^4S_F(p-k')\gamma_\mu S_F(p-k')\gamma_\nu\end{aligned}\qquad(12.7-13)$$

又从(12.6—3)式有

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = e^2(2\pi)^8\int d^4k'\, D_F(k')\gamma_\nu S_F(p_2 - k')\gamma_\mu S_F(p_1 - k')\gamma_\nu \tag{12.7-14}$$

对比(12.7—13)和(12.7—14)式可以看出，当 $k=0$时有

$$\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu} = (2\pi)^4\Lambda_\mu^{(2)}(p,p) \tag{12.7-15}$$

这就是说电子自能的微商等效于它的内电子线插上能量动量 $k=0$的外光子线，可用图12—17表示。

$\frac{\partial}{\partial p_\mu}$ = $k=0$

图 12—17

将上述结果推广到一般情况，得到

$$\frac{\partial\Sigma^*(p)}{\partial p_\mu} = (2\pi)^4\Lambda_\mu(p,p) \tag{12.7-16}$$

这式称 Ward 恒等式，其中 $\Sigma^*(p)$ 代表 e^{2n} 级所有正规电子自能部分的总和，而 $\Lambda_\mu(p,p)$ 是由自能图形中插上外光子线后可能构成的所有正规顶角(发散)部分的总和。例如，对于图12—18a 的电子自能部分，可以构成 b、c、d、三个正规顶角图形。故利用 Ward 恒等式可避免电子自能的交缠无穷大所产生的困难。

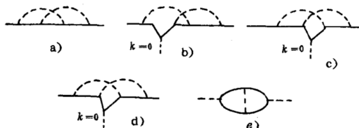


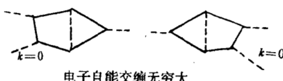
图 12—18

对于光子自能的图形，我们也可能遇到交缠无穷大。最简单的图形如图12—18e 所示。避免这种困难的方法和电子自能的类似，

Ward 导得如下的恒等式：

$$\frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k_\mu} = (2\pi)^4 \Delta_\mu(k,k) \qquad (12.7-17)$$

这个函数包含三个外光子线，其中一个光子线的能量动量 $k=0$。对应于图 e 的情况。$\Delta_\mu(k,k)$ 代表图 12－19二个图形贡献的总和。



电子自能交缠无穷大

图 12－19

5. **重整化常数**

以上我们指出了重整化方法的主要途径。显然在具体计算中，手续将是相当复杂的，现在只将主要结论写在下面。

在计算任何物理过程的 S 矩阵元时，先把所有属于这一过程的不可约化图形画出来，然后以无穷大已经分割出去的函数 $S'_{F0}(p)$、D'_{F0} 和 $\Gamma'_{\mu0}(p_1,p_2)$ 分别代表内电子线、内光子线和顶角，以 $\bar{u}(p)$、$u(p)$ 和 $a_\mu(k)$分别代表外电子线和光子线，就可以按照所有图形写出相应的 S 矩阵元。在这些矩阵元中不存在紫外发散困难，而且包括了所有的辐射修正在内。

类似§12.6的讨论，可以证明用这种方法计算得到的结果与用没有略去无穷大的表式 $S'_F(p)$、$D'_F(p)$ 和 $\Gamma'_\mu(p)$ 进行计算，然后再进行质量重整化和电荷重正化所得到的结果完全相同。函数 Γ'_μ, S'_F, D'_F 与 $\Gamma'_{\mu0}$, S'_{F0}, D'_{F0}有如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} \Gamma'_\mu(e) &= \frac{1}{z'}\,\Gamma'_{\mu0}(e_0) \\ S'_F(e) &= z' S'_{F0}(e_0) \\ D'_F(e) &= zD'_{F0}(e_0) \end{aligned}\right\} \qquad (12.7-18)$$

这里 z、z' 称为重整化常数。上式的含义是，各式左右二方表式的动量变量都取相同的数值，质量都取重整化了的质量 m_0，但电荷则取不同的值，在各式左方电荷取没有重整化的值 e，而在右方电荷取重整化了的数值 e_0：

$$e_0 = \sqrt{z}\, e \tag{12.7-19}$$

对于外电子线和外光子线则有：

$$\left.\begin{aligned} u'(p) &= \sqrt{Z'}\, u(p) \\ \bar{u}'(p) &= \sqrt{Z'}\, \bar{u}(p) \\ a'(k) &= \sqrt{Z}\, a(k) \end{aligned}\right\} \tag{12.7-20}$$

其中 u'、$\bar{u}'$ 和 a' 代表包括所有高次近似效应的外电子线和外光子线，而 u，$\bar{u}$，和 a 代表零次近似的外电子线和外光子线。

因此，当计算任何物理过程的 S 矩阵元时，可先将所有不可约化图形画出来，然后按照下列规则写下矩阵元中的各个因子：

(1) 以 $Z'^{-1}\Gamma'_{\mu 0}(e_0)$ 代表顶角

(2) 以 $Z' S'_{F0}(e_0)$ 代表内电子线

(3) 以 $ZD'_{F0}(e_0)$ 代表内光子线

(4) 以 $\sqrt{Z'}\, u(p)$ 或 $\sqrt{Z'}\, \bar{u}(p)$ 代表外电子线

(5) 以 $\sqrt{Z}\, a(k)$ 代表外光子线

假如属于 $S^{(n)}$ 的不同约化的图形具有 n 个顶角、E_i 条内电子线、P_i 条内光子线、E_e 条外电子线和 P_e 条外光子线，则计算过程实际上等效于用 $S'_{F0}(e_0)$、$D'_{F0}(e_0)$、$\Gamma'_{\mu 0}(e_0)$、和 $u(p)$，$\bar{u}(p)$、$a(k)$ 分别代表相应的内部线，顶角和外部线，并且将整个矩阵元表式乘上一个因子：

$$Z'^{\left(-n+E_i+\frac{1}{2}E_e\right)} Z^{\left(P_i+\frac{1}{2}P_e\right)} = (\sqrt{Z})^n \tag{12.7-21}$$

而在 $S^{(n)}$ 表式中必定有一个因子 e^n，将它和上式的 $(\sqrt{Z})^n$ 合并起来就得到 e_0^n，这样在矩阵元中就只出现重整化了的电荷 e_0 和质量 m_0。我们令 e_0 和 m_0 取实验上所观察到的电子电荷和电子质量的数值，于是，计算方法归结为：将所研究的过程的所有不可约化图形画下，并按照如下规则：

(1) 以 $\Gamma'_{\mu 0}$ 代表顶角

(2) 以 S'_{F0} 代表内电子线

(3) 以 D'_{F0} 代表内光子线

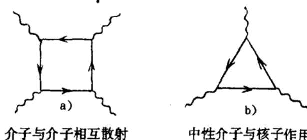
(4) 以 u，$\bar{u}$， 代表外电子线

(5) 以 a 代表外光子线

写下相应的 S 矩阵元，那末这样得到的表式都是有限的，包含了所有的辐射修正，而紫外发散就已消除。

6. 其它量子场的重整化问题

在上面我们讨论了量子电动力学中的重整化方法，但在其它量子场中只有很少数的情况下才能应用重整化方法以消除发散困难。例如，赝标介子与核子之间的赝标耦合，标量介子与核子之间的标量耦合都可用重整化方法消除理论中的发散困难。这些理论中的重整化比量子电动力学中的重整化较为复杂，这是因为介子理论中不具有规范不变性。因此，介子与介子的相互散射过程（图12－20a）和光子与光子相互散射不同，它是原始发散的，故在介子理论中除了进行质量（包括介子）重整化和相互作用常数重整化之外，还要引进与介子——介子散射相抵消的项，才可以消除发散困难。此外，法雷定理在某些情况下不能随意推广应用。例如，中性标量介子与核子的相互作用中法雷定理不能适用，故必须在相互作用哈密顿密度中引入一抵消项，以免除具有三条外介子线的发散困难。



介子与介子相互散射　　　　中性介子与核子作用

图 12－20

在许多情况下，可以出现无穷多种的原始发散图形，那末只依靠重整化方法，仅仅调整有限的几个常数就不能将无穷多种的原始发散消去。例如，介子与核子的相互作用中包含了介子场量的导数 $\partial_\mu\varphi$，在理论中将出现无穷多种原始发散，因为 $\partial/\partial x_\mu$ 在动量空间中将给出一动量因子 k_μ，而外介子线仅包含固定动量，故仅对内粒子线作出贡献，因而(12.7－3)式应修改为

$$K=(4-\frac{3}{2}E_e-P_e)+(n-P_e)\geqslant 0$$

这样，发散程度不仅与外粒子线有关，而且与图形的顶角数 n 有关。由此可见，随着图形的复杂性而原始发散的种类亦愈多，因此不能用重整化方法以消除多种原始发散。类似的理由可说明费米弱相互作用理论中也将出现无穷多种原始发散，亦不能用重整化方法消除其发散困难。

最后，我们指出，采用质量重整化和电荷重整化后，在量子电动力学中，各级计算中的发散都已消去，利用微扰方法展开至六阶都与实验结果符合得很好。但这种非凡的准确性并不能说微扰论是绝对正确的。相反，在相当合理的考虑下，我们可推测整个微扰级数（各项之和）并不收敛，它仅是一个渐近级数，但逼近什么就不知道了，这说明整个问题尚未完全解决。

第十三章　规范场

按照目前规范理论的观点，将基本粒子分为三类：实物粒子（包括轻子和夸克），规范粒子（包括光子、中间玻色子和胶子）和希格斯(Higgs)粒子。用场论的语言，它们分别对应于实物场、规范场和 Higgs 场。规范粒子（或对应的场）是传递相互作用的，希格斯粒子，主要使其它粒子获得质量。这一章，我们限于经典理论的范围介绍规范场论。前面已经看到，整体变换的对称性（不变性）导致守恒定律和相应的守恒量。下面将看到，局域变换的对称性（不变性）要求我们引入规范场，并且导致确定的相互作用。

§13.1　经典场论中的规范不变性与规范场

1. 整体规范不变性

为了描述场（或粒子）的内部性质，如电荷、同位旋(*isopin*)、重子数、轻子数、味道、颜色等，我们引入一个抽象的空间—内部空间。在内部空间转动下，场量 $\varphi(x)$ 作变换

$$\varphi'(x)=u(\theta)\varphi(x) \qquad (13.1-1)$$

其中

$$u(\theta)=exp[-i\theta^a T^a]$$

是规范群的元素，是一个幺正幺模矩阵，T^a 称为群的生成元，θ^a 称为群参数。当参数 θ^a 与时空坐标 x 无关时，(13.－1)的变换称为整体规范变换(*global gauge transformation*)。当 $\theta^a=\theta^a(x)$ 是时空坐标的函数时，(13.1－1)的变换称为局域规范变换(*Local gauge transformation*)。整体规范变换就是时空各点的场量都作相同的变换，场在内部空间分量的变换是

$$\varphi'_\sigma(x)=exp[-i\theta^a T^a_{\sigma\rho}]\varphi_\rho(x) \qquad (13.1-1')$$

其中 $\sigma=1,2,\cdots,n$ 是场在内部空间的分量指标，n 是内部空间的维数。群的生成元是一个 $n\times n$ 矩阵，满足对易关系

$$[T^\alpha,T^\beta]=if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma$$

$f^{\alpha\beta\gamma}$称为群的结构常数。(13.1－1)也可写成矩阵形式

$$\varphi'(x)=exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\varphi(x) \qquad (13.1-1'')$$

由于 θ^α 是与 x 无关的常数，故场量的时空导数 $\partial_\mu\varphi(x)$ 在规范变换时也像场量一样变换，即

$$\partial_\mu\varphi(x)\rightarrow\partial_\mu\varphi'(x)=u(\theta)\partial_\mu\varphi(x) \qquad (13.1-2)$$

这是整体规范变换的一个重要特点。

整体规范变换又称第一规范变换。场系统在内部空间的对称性，即场系统在内部空间"转动"下的不变性，可用它的 Lagrangian 在(13.1－1)、(13.1－2)的规范换下的不变性即

$$\mathscr{L}(\varphi'(x),\partial_\mu\varphi'(x))=\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)) \quad (13.1-3)$$

来描述(即 $\delta\mathscr{L}=0$)。

在无穷小变换下，参量 θ^α 是无穷小量，于是(13.1－1)变成

$$\varphi'(x)=(1-i\theta^\alpha T^\alpha)\varphi(x)$$

$$\delta\varphi(x)=\varphi'(x)-\varphi(x)=-i\theta^\alpha T^\alpha\varphi(x) \quad (13.1-4)$$

由(13.1－3)和(13.1－4)有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\varphi'(x),\partial_\mu\varphi'(x))-\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi(x)}\delta\varphi(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\delta\partial_\mu\varphi(x)\\&=\partial_\mu[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\delta\varphi(x)]\\&=\partial_\mu[-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\theta^\alpha T^\alpha\varphi(x)]=0\end{aligned}$$

由于 θ_α 的任意性，可得

$$\partial_\mu J^\alpha_\mu=0$$

$$J^\alpha_\mu=-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}T^\alpha\varphi(x)$$

这就是内部对称性对应的守恒流，其守恒荷是

$$\theta^a = \int_v J_0^a \mathrm{d}v = -i\int_v \pi(x) T^a \varphi(x) \mathrm{d}v$$

其中 $\pi(x) = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}$是场的正则动量，当生成元 T^a 是电荷、重子数或同位旋的表示矩阵时，上式就对应于场的电荷、重子数或同位旋。当 T^a 是电荷算符时，上式就是我们在第二章中所讨论过的场的电荷。

2. 局域规范不变性

当规范变换参数 θ^a 与时空坐标 x 有关时，场量的规范变换表示成

$$\varphi(x) - \varphi'(x) = exp[-i\theta^a(x)T^a]\varphi(x) \quad (13.1-5)$$

这种变换称为局域规范变换，而场的导数 $\partial_\mu\varphi(x)$的变换是

$$\begin{aligned} \partial_\mu\varphi(x) \rightarrow \partial_\mu\varphi'(x) &= exp[-i\theta^a(x)T^a]\partial_\mu\varphi(x) \\ &\quad - i\partial_\mu\theta^\beta(x)T^\beta exp[-i\theta^a(x)T^a]\varphi(x) \\ &\neq exp[-i\theta^a T^a]\partial_\mu\varphi(x) \end{aligned}$$

这表明场量和场量的导数有不同的变换规律，多出了第二项。这就是局域规范变换和整体规范变换的重要区别（后面我们将看到，当引进规范场时，就可消除这一差别）。

由于 $\varphi(x)$ 和 $\partial_\mu\varphi(x)$的变换规律不同，故在整体变换下不变的 Lagrangian，在局域规范变换下，不再保持不变，即对局域规范变换

$$\mathscr{L}(\varphi'(x), \partial_\mu\varphi'(x)) \neq \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))$$

但目前的场论是局域场论，人们认为内部空间是如此对称，以致场系统不仅在整体规范变换下，而且在局域规范变换下都保持不变，整体规范不变只是局域规范不变的一个特例。应该推广 Lagrangian，使它在局域规范变换下保持不变，我们设想将导数 ∂_μ 推广成协变导数(*Covariant derivative*)D_μ，并要求场量 $\varphi(x)$和它的协变导数 $D_\mu\varphi(x)$按同样规律变换，即

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u\varphi(x) \\ D'_\mu\varphi'(x) &= uD_\mu\varphi(x) \end{aligned} \quad (13.1-6)$$

其中 $$u = exp[-i\theta^a(x)T^a]$$

这样由它们构成的 Lagrangian 就是规范不变的，即

$$\mathscr{L}(\varphi'(x), D'_\mu\varphi'(x)) = \mathscr{L}(\varphi(x), D_\mu\varphi(x))$$

3. **规范场势和规范场强**

如何选择协变导数 D_μ 呢？由电动力学中常按最小耦合方式引进电磁场的启示，按 Yang（扬振宁）—Mills（米尔斯）的观点，我们可按下列方式引进规范场，即定义协变导数为

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu(x)$$

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^a(x)T^a \qquad (13.1-7)$$

其中 $A_\mu^a(x)$ 称为规范场的势，由于 ∂_μ 和 D_μ 都是四维时空的矢量，故规范场势也应是四维时空的矢量，这表示规范场是一个矢量场（对应自旋为1的粒子）。

引入规范场的目的是为了使场的协变导数在定域规范变换下像场本身一样变换，即满足（13.1－6）式，以保证场系统的 Lagrangian（或作用量）有规范不变性。反过来，由（13.1－6）式就可确定规范场势的变换规律。将（13.1－7）代入（13.1－6）得

$$(\partial_\mu - igA'^a_\mu(x)T^a)u(\theta)\varphi(x) = u(\theta)(\partial_\mu - igA_\mu^a(x)T^a)\varphi(x)$$

注意到 θ 是 x 的函数，可求得

$$-igA'^a_\mu(x)T^a u(\theta)\varphi(x) = -igu(\theta)A_\mu^a T^a\varphi(x) - (\partial_\mu u(\theta))\varphi(x)$$

因为上式对所有 $\varphi(x)$ 成立，所以有

$$A'^a_\mu T^a = u(\theta)A_\mu^a(x)T^a u^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}(\partial_\mu u(\theta))u^{-1}(\theta)$$

$$= u(\theta)A_\mu^a(x)T^a u^{-1}(\theta) + \frac{i}{g}u(\theta)\partial_\mu u^{-1}(\theta) \qquad (13.1-8)$$

最后一个等号用了 $\partial_\mu(uu^{-1}) = 0$

这是电磁势规范变换的推广，因为对电磁势 A_μ^a 只有一个内部空间分量 A_μ，规范变换群元素为 $u = e^{-i\theta(x)T}$，于是（13.1－8）式简化成

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x)$$

这正是电磁势的规范变换表示式。

对于无穷小变换，$u(\theta) \simeq 1 - i\theta^a T^a$，（13.1－8）变成

$$A'^a_\mu(x)T^a = (1 - i\theta^\beta T^\beta)A_\mu^a T^a(1 + i\theta^\beta T^\beta)$$

$$+\frac{i}{g}(1-i\theta^\beta T^\beta)\partial_\mu(1+i\theta^\alpha T^\alpha)$$

$$=A_\mu^\alpha(x)T^\alpha - i\theta^\beta A_\mu^\alpha[T^\beta,T^\alpha]-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^\alpha T^\alpha$$

$$=A_\mu^\alpha T^\alpha + f^{\alpha\beta\gamma}\theta^\beta A_\mu^\gamma T^\alpha - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^\alpha T^\alpha \qquad (13.1-9)$$

所以 $$A_\mu'^{\alpha}=A_\mu^\alpha(x)+f^{\alpha\beta\gamma}\theta^\beta(x)A_\mu^\gamma(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^\alpha(x)$$

这是规范势（gauge potential）在无穷小变换下的变换规律。为表示方便，利用 $A_\mu=-igA_\mu^\alpha T^\alpha$，(13.1—8)式可写成

$$A'_\mu=uA_\mu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1} \qquad (13.1-10)$$

仿照电磁场，我们定义规范场强（gauge field strength）$F_{\mu\nu}^\alpha$为

$$F_{\mu\nu}=D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$$

其中 $$F_{\mu\nu}=-igF_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha \qquad A_\mu=-igA_\mu^\alpha T^\alpha \qquad (13.1-11)$$

将 $F_{\mu\nu}, D_\mu, A_\mu$ 的定义式代入上式得

$$\begin{aligned}-igF_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha &=(\partial_\mu-igA_\mu^\alpha T^\alpha)(igA_\nu^\beta T^\beta)(\partial_\nu-igA_\nu^\beta T^\beta)(-igA_\mu^\alpha T^\alpha)\\ &=-ig\partial_\mu A_\nu^\beta T^\beta+ig\partial_\nu A_\mu^\alpha T^\alpha-g^2A_\mu^\alpha A_\nu^\beta[T^\alpha,T^\beta]\\ &=-ig(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha)T^\alpha-ig^2f^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta T^\gamma\end{aligned}$$

于是

$$F_{\mu\nu}^\alpha=(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha)-gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \qquad (13.1-12)$$

这是规范场强和规范场势之间的关系式，与我们熟悉的电磁场和电磁势之间的关系比较，多出了结构常数 $f^{\alpha\beta\gamma}$有关的项。当 $f^{\alpha\beta\gamma}=0$ 时，就得到电磁场的情况。

规范场强的变换规律可由它的定义式(13.1—11)和(13.1—10)得到

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu}&=D'_\mu A'_\nu-D'_\nu A'_\mu=(\partial_\mu+A'_\mu)A'_\nu-(\partial_\nu+A'_\nu)A'_\mu\\ &=(\partial_\mu+uA_\mu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1})(uA_\nu u^{-1}+u\partial_\nu u^{-1})\\ &\quad-(\partial_\nu+uA_\nu u^{-1}+u\partial_\nu u^{-1})(uA_\mu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1})\\ &=u[(\partial_\mu+A_\mu)A_\nu-(\partial_\nu+A_\nu)A_\mu]u^{-1}\\ &=u(D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu)u^{-1}=uF_{\mu\nu}u^{-1}\end{aligned}$$

即 $$F'_{\mu\nu}=uF_{\mu\nu}u^{-1} \tag{13.1-13}$$

对无穷小变换，$u(\theta)\simeq 1-i\theta^{\alpha}T^{\alpha}$，上式变成

$$F'^{\alpha}_{\mu\nu}(x)=F^{\alpha}_{\mu\nu}(x)+f^{\alpha\beta\gamma}\theta^{\beta}F^{\gamma}_{\mu\nu}(x) \tag{13.1-14}$$

4. 规范场方程

为使场系统具有规范不变性，将场量的导数 $\partial_{\mu}\varphi(x)$ 改写成协变导数 $D_{\mu}\varphi(x)$，这样，规范场势被引进理论中，并且确定了规范场和场 $\varphi(x)$的相互作用形式。但自由的规范场的 Lagrangian 是什么呢？我们可以根据规范不变性要求来确定它。由(13.1－13)式有

$$F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}=uF_{\mu\nu}u^{-1}uF^{\mu\nu}u^{-1}=uF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}u^{-1}$$

上式取矩阵迹得

$$TrF'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}=TruF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}u^{-1}=TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

可见 $TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$是规范不变量，可用它来构成规范场的 Lagrangian。由于

$$\begin{aligned}TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}&=Tr[(-igF^{\alpha}_{\mu\nu}T^{\alpha})(-igF^{\mu\nu\beta}T^{\beta})]\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}Tr(T^{\alpha}T^{\beta})\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}T(R)\delta_{\alpha\beta}\\&=-g^2T(R)F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha}\end{aligned} \tag{13.1-15}$$

其中 $Tr(T^{\alpha}T^{\beta})=T(R)\delta_{\alpha\beta}$，$T(R)$是常数，故 $F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha}$也是规范不变的。于是仿照电磁场，我们可令规范场的 Lagrangian 为

$$\mathscr{L}_F=-\frac{1}{4}F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha} \tag{13.1-16}$$

借助变分原理，可由 $\mathscr{L}_F$ 导出自由规范场的运动方程。为讨论方便，规范场的 Lagrangian 改写成矩阵迹的形式(准确到一个常数)

$$\mathscr{L}_F=-\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{13.1-17}$$

于是作用量(为方便，不区分上下指标)

$$S=-\frac{1}{2}\int Tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\mathrm{d}x \tag{13.1-18}$$

$$\delta S=-\int Tr(\delta F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu})\mathrm{d}x=0$$

$$\delta F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}=\delta(D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu)\cdot F_{\mu\nu}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta[D_\mu A_\nu]\cdot F_{\mu\nu}&=\delta[(\partial_\mu+A_\mu)A_\nu]\cdot F_{\mu\nu}\\&=(\partial_\mu\delta A_\nu+\delta A_\mu\cdot A_\nu+A_\mu\cdot\delta A_\nu)F_{\mu\nu}\\-\delta[D_\nu A_\mu]\cdot F_{\mu\nu}&=-(\partial_\nu\delta A_\mu+\delta A_\nu\cdot A_\mu+A_\nu\delta A_\mu)F_{\mu\nu}\\&=(\partial_\mu\delta A_\nu+\delta A_\mu\cdot A_\nu+A_\mu\cdot\delta A_\nu)F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

上式第二个等号用了 $F_{\mu\nu}$的反对称性。联合前面三个式子得

$$\delta F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}=2(\partial_\mu\delta A_\nu+\delta A_\mu\cdot A_\nu+A_\mu\delta A_\nu)F_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\delta S&=-\int\mathrm{d}xTr(\delta F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu})\\&=2\int\mathrm{d}xTr[(\partial_\mu\delta A_\nu+\delta A_\mu\cdot A_\nu+A_\mu\delta A_\nu)F_{\mu\nu}]=0\end{aligned}$$

分部积分并利用 $F_{\mu\nu}$的反对称性和迹的性质得

$$\begin{aligned}\delta S&=-2\int\mathrm{d}xTr(-\delta A_\nu\partial_\mu F_{\mu\nu}-\delta A_\nu[A_\mu,F_{\mu\nu}])\\&=2\int\mathrm{d}xTr\{\delta A_\nu(\partial_\mu F_{\mu\nu}+[A_\mu,F_{\mu\nu}])=0\end{aligned}$$

上式对任何 δA_ν 成立，故有

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}+[A_\mu,F_{\mu\nu}]=0\qquad(13.1-19)$$

这就是规范场方程。

注意到$[\partial_\mu,F_{\mu\nu}]\psi=\partial_\mu(F_{\mu\nu},\psi)-F_{\mu\nu}\partial_\mu\psi=\partial_\mu F_{\mu\nu}$，上式可写成

$$[D_\mu,F_{\mu\nu}]=0$$

将(13.1—19)写成分量形成，由

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-ig\partial_\mu F^\alpha_{\mu\nu}T^\alpha$$

和

$$\begin{aligned}[A_\mu,F_{\mu\nu}]&=(-ig)^2[A^\beta_\mu T^\beta\cdot F^\gamma_{\mu\nu}T^\gamma]\\&=(-ig)^2A^\beta_\mu F^\gamma_{\mu\nu}[T^\beta,T^\gamma]\\&=(-ig)^2if^{\beta\gamma\alpha}A^\beta_\mu F^\gamma_{\mu\nu}T^\alpha\end{aligned}$$

所以

$$\partial_\mu F^\alpha_{\mu\nu}+gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu F^\gamma_{\mu\nu}=0\qquad(13.1-20)$$

在电动力学情况中，内部空间只有一个分量，结构常数 $f^{\alpha\beta\gamma}=0$，上式变成熟知的 Maxwll 方程

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$$

下面以带电费米子电磁相互作用为例，具体说明为了保证规范不变性怎样引进规范场，怎样确定相互作用形式以及系统的规范不变的 Lagrangian。

费米子场的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}_e = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$$

当场量 ψ 做规范变换

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\psi(x)$$

时，由于场量微商不像场量一样变换，即

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi'(x) &= e^{-i\theta(x)}\partial_\mu \psi(x) - ie^{-i\theta(x)}\partial_\mu \theta(x)\psi(x) \\ &\neq e^{-i\theta(x)}\partial_\mu \psi(x)\end{aligned}$$

故 $\mathscr{L}_e$ 不是规范不变的。为使 $\mathscr{L}_e$ 是规范不变量，我们用协变导数代替普通导数，即

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

这时，新的 Lagrangian

$$\mathscr{L}'_e = -\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi$$

在规范变换

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\psi(x)$$

和 $$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x)$$

下是不变的，并且

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'_e &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \psi \\ &= \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_i\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{L}_i = ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \psi$，是由于规范不变性要求所确定的相互作用 Lagrangian。

连同自由规范场(这里是电磁场)，系统总的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_F + \mathscr{L}_i$$

$$= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \psi$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 是电磁场强度，上式是规范不变的。

在结束本节之前必须指出，在规范场的 Lagrangian 中没有包含场量 $A_\mu^a(x)$ 的平方项，这是规范不变性所要求的，的确

$$A'_\mu(x) A_\mu^{a\prime}(x) \neq A_\mu^a(x) A_\mu^a(x)$$

因而它是破坏规范不变性的。可是场量的平方项反映场(粒子)的质量，没有 $A_\mu^a(x)$ 的平方项，就意味着规范场(规范粒子)没有质量。光子质量为零，相应的传递电磁作用的规范场是电磁场，没有质量，这是符合实验事实的。但是传递弱作用的规范粒子—中间玻色子 $W^\pm$，Z^0 是有质量的(1983年实验已经发现 $m_{W\pm} \approx 81\text{GeV}$，$m_{Z_0} \approx 90\text{GeV}$)，没有 $A_\mu^a(x)$ 的平方项与客观不符，这是规范理论遇到的一个困难，如何使规范粒子获得质量呢？这可借助对称性的破缺和 Higgs 场来实现。

§ 13.2 希格斯(Higgs)场的破缺对称性

Higgs 场是人们为了解决前面所提到的规范理论的困难而提出来的。至今尚未从实验上发现 Higgs 场(Higgs 粒子)，但人们相信它的存在。Higgs 场在内部空间可能有多个分量，但在时空空间只有一个分量，因而是一个自旋为零的标量场，用 $\varphi_\sigma(x)$ 表示，$\sigma = 1, 2, \cdots, n$ 代表内部空间的分量指标。先讨论只有一个分量的简单情况，这时场的 Lagrangian 可写成

$$\mathscr{L}_\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \qquad (13.2-1)$$

与一般的标量场不同，这里 $\mu^2 < 0$，而且存在自作用项 $-\frac{\lambda}{4}\varphi^4 (\lambda \neq 0)$。

(13.2－1)描述的 Higgs 场，其质量 $m = \sqrt{\mu^2}$ 是虚数。在内部空间反射变换 $\varphi(x) \to -\varphi(x)$ 下，场的 Lagrangian 是不变的，也就是说系统对内部空间反射是对称的，但场的真空态在内部空间反射

变换下却是不对称的，这可由下面的讨论看出。

真空态就是能量最低的态。把场量 $\varphi(x)$ 看成广义坐标，而相应的广义动量就是

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}\varphi}{\partial\dot{\varphi}(x)}=\dot{\varphi}(x)$$

场的哈密顿密度(能量密度)是

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{\varphi}(x)&=\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathscr{L}_{\varphi}\\&=\frac{1}{2}\pi^{2}(x)+\frac{1}{2}(\nabla\varphi(x))^{2}+\frac{\mu^{2}}{2}\varphi^{2}+\frac{\lambda}{4}\varphi^{4}\end{aligned}$$

由于上式的时空导数 $\partial_\mu\varphi$ 都是平方项且系数为正，故场的最小能量条件是 $\varphi(x)=$ 常数 $=\varphi$，场的势函数是

$$V(\varphi)=\frac{\mu^{2}}{2}\varphi^{2}+\frac{\lambda}{4}\varphi^{4}\qquad(13.2-2)$$

取极值

$$\frac{\mathrm{d}V}{d\varphi}=\mu^{2}\varphi+\lambda\varphi^{3}=0\qquad\varphi^{2}=-\frac{\mu^{2}}{\lambda}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}V}{\mathrm{d}\varphi^{2}}=\mu^{2}+3\lambda\varphi^{2}=-2\mu^{2}>0$$

所以 Higgs 场的能量最低态是(如图13－1)

$$\varphi_0^2=-\frac{\mu^{2}}{\lambda}$$

$$\varphi_{0}=v=+\sqrt{\frac{-\mu^{2}}{\lambda}}$$

或 $$\varphi_{0}=-v=-\sqrt{\frac{-\mu^{2}}{\lambda}}$$

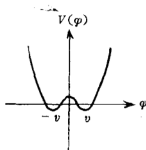


图 13—1

真空态的能量

$$E_{0}-V_{0}=-\frac{\mu^{4}}{4\lambda}$$

我们可以选定

$$\varphi_{0}=<|\varphi|>_{0}=v=+\sqrt{\frac{-\mu^{2}}{\lambda}}\qquad(13.2-3)$$

为 Higgs 场的真空态，显然，在内部空间反射变换 $\varphi(x)\to-\varphi(x)$ 下，由于 $v\neq-v$，一种真空变成了另一种真空，也就是说真空态在

内部空间反射变换下，对称性是破缺的。

如果我们把 Higgs 场 φ 做一平移

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - v \qquad (13.2-4)$$

新的 Higgs 场 $\varphi'(x)$的真空

$$\varphi'_0 = <|\varphi'|>_0 = <|\varphi|>_0 - v = 0$$

在内部空间反射变换 $\varphi'(x) \to -\varphi'(x)$下是不变的，也就是说，新场的真空是对称的。将(13.2－4)代入(13.2－1)得到新场的 La grangian(丢掉一个常数项)

$$\mathscr{L}_{\varphi'} = \frac{1}{2}\partial\mu\varphi'\,\partial_\mu\varphi' + \mu^2\varphi'^2 - \lambda v\varphi'^3 - \frac{\lambda}{4}\varphi'^4 \qquad (13.2-5)$$

显然，由于出现 φ'^3的项，在内部空间反射变换下，新的 Lagrangian 不是不变的，而是对称性破缺，这时 Higgs 场的质量

$$-\frac{m^2}{2} = \mu^2 \qquad m = \sqrt{-2\mu^2}$$

是实的。综上所述，Hgiggs 场有两个特点：其一，当它以(13.2—1)式描述时，质量是虚的，在内部空间反射变换下，Lagrangian 是对称的，而真空态是破缺的；其二是当它以(13.2—5)式描述时，质量是实的，Lagrangian 是破缺的，而真空态却是对称的，这就是 Higgs 场的破块对称性，常称为自发破缺对称性(*Spontaneously broken symmetries*)。

§13.3 希格斯机制

利用 Higgs 场的破缺对称性，借助本节所介绍的 Higgs 机制，可使原来没有质量的规范场获得质量，从而使规范理论克服了一个重大困难，将理论向前推进一大步。下面我们以有两个分量的 Higgs 场为例来阐述 Higgs 机制的基本思想。

1. 整体规范破缺对称性

对内部空间有两个分量的 Higgs 场，其 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}_\varphi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \tag{13.3-1}$$

可用相互共轭的复数场

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \qquad \varphi^+(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$$

来代替 φ_1和 φ_2，将上面的 Lagrangian 写成

$$\mathscr{L}_\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{2}(\varphi^+\varphi) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^+\varphi)^2 \tag{13.3-2}$$

取极值可得到真空态(*Vacuum state*)

$$<|\sqrt{\varphi^+\varphi}|>_0 = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \tag{13.3-3}$$

显然，对于整体规范变换

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{-i\theta}\varphi(x)$$

$$\varphi^+(x) \to \varphi^{+\prime}(x) = \varphi^+(x)e^{i\theta} \tag{13.3-4}$$

(13.3－2)所表示的 Lagrangian 是不变的，但(13.3－3)所表示的真空态却不是不变的(由于内部空间转动，改变了真空态的方向)。所以 Higgs 场对整体规范变换是破缺对称的，即 Lagrangian 对称，真空态不对称，或反过来。

2. 局域规范破缺对称性

(13.3－2)所表示的 Higgs 场的 lagrangian 和(13.3－3)所表示的 Higgs 场的真空(*vacuum*)，对下列的局域规范变换

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{-i\theta(x)}\varphi(x)$$

$$\varphi^+(x) \to \varphi^{+\prime}(x) = \varphi^+(x)e^{i\theta(x)} \tag{13.3-5}$$

却不是不变的(即不对称)。为使理论具有对称性，像以前一样，必须引进规范场 $A_\mu(x)$，把(13.3－2)中的导数变成协变导数，即

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

再加上自由的规范场就得到

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^+(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi - \frac{\mu^2}{2}(\varphi^+\varphi)$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\varphi^+\varphi)^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (13.3-6)$$

其中 $$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

显然新的 Lagrangian(5.3—6)对 Higgs 场的局域规范变换(13.3—5)和规范场的规范变换

$$A_\mu(x)\rightarrow A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \qquad (13.3-7)$$

是不变的。但 Higgs 场的真空态在局域规范变换下仍然改变方向，故(13.3—6)表示的理论是一个局域规范破缺对称的理论。

3. 参数化

(13.3—6)所描述的系统，规范场 $A_\mu(x)$仍然没有平方项，即规范场仍然没有质量。因此，必须通过参数化的方法进一步处理，即不用 φ_1和 φ_2表 φ，而是引进两个新的实数场，一是 η 场，它沿真空态矢 v 的方向，另一个是 ξ 场，它与真空态矢 v 垂直。我们按参数化

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=exp\left[\frac{i\xi(x)}{v}\right](v+\eta)\\ \varphi^+(x)&=exp\left[-\frac{i\xi(x)}{v}\right](v+\eta)\end{aligned}\right\} \qquad (13.3-8)$$

表示 $\varphi(x)$场，由于(13.3—3)，新场的真空值是零，即

$$<|\eta|>_0=0 \qquad <|\xi|>_0=0 \qquad (13.3-9)$$

将(13.3—8)代入(13.3—6)得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{2}(\partial_\mu+ieA_\mu)\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{v}\right](v+\eta)(\partial_\mu-ieA_\mu)\\ &\cdot\exp\left[i\frac{\xi(x)}{v}\right]\cdot(v+\eta)-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2-\frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4\\ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\mu^2\eta^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2+evA_\mu\partial_\mu\xi\\ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^2+\text{三次方以上的项} \qquad (13.3-10)\end{aligned}$$

可见在局域规范变换(13.3—5)、(13.3—7)下，新场 η,ξ 的真空态是不变的，但系统的 Lagrangian 却不是不变的，这是又一种局域规

范破缺对称性。这里 Higgs 场 η 具有实质量 $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$，规范场获得了质量 $m_A = ev$。但却出现了无质量的自旋为零的标量场 ξ，对应的粒子称哥尔斯通(Goldstone)粒子(目前尚未发现)。另外，还出现了 $\xi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 直接两点耦合，这些都是人们所不期望的。

4. 幺正规范

我们利用规范自由度(*gauge degrees of freedom*)可以消除 Goldstone 粒子和两点耦合方式，所谓规范自由度是指 Higgs 场 $\varphi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 在规范变换(13.3－5)和(13.3－7)下，由(13.3－6)式表示的 Lagrangian 是不变的，即

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu + ieA'_\mu)\varphi^{+'}(x)(\partial_\mu - ieA'_\mu)\varphi'(x) - \frac{\mu^2}{2}\varphi^{+'}(x)\varphi'(x) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+'}(x)\varphi'(x))^2 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \qquad (13.3-11)$$

其中 $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$

将参数化了的 $\varphi(x)$ 场(见13.3－8)和 $A_\mu(x)$ 一起作规范变换，并令规范参数 $\theta(x) = \frac{\xi(x)}{v}$ 即

$$u(\theta) = u(\xi) = exp[-i\frac{\xi(x)}{v}]$$

那么，对(13.2－8)的 $\varphi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 作规范变换的结果是

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &\to \varphi'(x) = exp[-i\frac{\xi(x)}{v}]\varphi(x) = v + \eta \\ \varphi^+(x) &\to \varphi^{+'}(x) = exp[i\frac{\xi(x)}{v}]\varphi^+(x) = v + \eta \\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (13.3-12)$$

将上式代入前式得

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu + ieA'_\mu)(v + \eta(x))(\partial_\mu - ieA'_\mu)(v + \eta(x)) - \frac{\mu^2}{2}(v + \eta(x))^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta(x))^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu}$$

$$=\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\mu^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4-\frac{1}{2}e^2A'_\mu\eta(2v+\eta(x))$$

$$-\frac{1}{2}e^2v^2(A'_\mu)^2-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \tag{13.3-13}$$

这个结果表明，由(13.2－13)表示的 Lagrangian 不是规范对称的，但由于$<|\eta|>_0=0$故 Higgs 场的真空仍是对称的，这是 Higgs 场对称破缺的又一种形式。这时$\xi(x)$场不见了，它变成规范场$A'_\mu(x)$的纵分量，零质量的标量粒子—Goldstone 粒子和两点耦合方式消除了，规范场$A'_\mu(x)$获得了质量$m_{A'_\mu}=ev$，Higgs 场有实质量$m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$，是实粒子了，从而使问题得到圆满解决。可以证明，当 Higgs 场有n个实分量时，通过 Higgs 机制，可使$n-1$个零质量的规范场获得质量。

§13.4 弱、电统一规范场论(G. W. S 模型)

在这一节，我们以近年粒子物理的一个重大突破—弱电统一规范理论为例子，来说明上几节发展起来的规范对称性理论的应用。我们已经看到，电磁相互作用是规范对称性理论，荷电粒子(荷电场)之间不是直接相互作用，而是通过一种规范粒子(规范场)—光子(电磁场)传递相互作用。例如两个电子的散射，可用图形(又称费曼图)形象地表示出来(如图13－2a)。

以前认为弱相互作用是四费米子(Fermion)直接相互作用，如β衰变

$$n\to p+e^-+\bar{\nu}_e$$

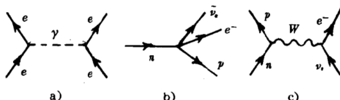


图 13－2

可用图13－2 b 表示。这种四费米子直接相互作用理论虽然取得一定成功，但进一步研究发现存在不可重整化等困难。仿照电磁作用，人们认为弱作用也是通过中间矢量玻色子(*intermediate vector bosons*)W 传递的，相应的费曼图如图13－2 c ，W 粒子对应的场就是一种新的规范场。

由于电磁作用和弱作用都是通过规范场传递的规范理论，它们有相似之处，经过研究，终于把这两种作用，在规范理论的框架中统一起来。因为强作用，是通过规范粒子(胶子)传递的，也是规范理论，人们进一步企图把强作用，弱作用和电磁作用在规范理论的框架中统一起来，这就是所谓大统一理论，这种研究已有一定的进展，下面阐述如何借助规范对称性理论把弱作用和电磁作用统一起来($G.W.S.$ 模型)。

1. 费米子场

基本的费米子是自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，规范理论中的实粒子(轻子和夸克)都是这种费米子，它们对应的是费米子场 ψ，满足熟知的 Dirac 方程

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0 \qquad (13.4-1)$$

其中(这里我们定义的 Dirac 矩阵与前面定义的稍有不同，故 Dirac 方程也稍有不同形式，这不影响我们的讨论。这里的 γ^0就是以前的 γ_4，$\boldsymbol{\gamma}$ 是以前的 $\boldsymbol{\gamma}$ 乘上虚数 i，γ_5和以前的差一负号)：

$$\gamma^{\mu}=|\gamma^0,\quad \boldsymbol{\gamma}|,\quad \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha},\quad \gamma^{0}=\beta$$

$$\gamma^0=\beta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix}$$

在标准表象中，$\boldsymbol{\sigma}$ 泡里矩阵

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad \sigma_2=\begin{vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{vmatrix},\quad \sigma_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\gamma_5=\gamma^5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix},\qquad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{vmatrix}$$

它们满足如下关系

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \\
&\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0 \\
&\gamma_5\Sigma - \Sigma\gamma_5 = 0 \\
&\beta\gamma = -\gamma_5\Sigma
\end{aligned}\right\} \qquad (13.4-2)$$

其中 $$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

在动量表象中 Dirac 方程是

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \qquad (13.4-3)$$

定义手征算符(*Chirality operator*)

$$P_L = \frac{1+\gamma_5}{2}, \qquad P_R = \frac{1-\gamma_5}{2} \qquad (13.4-4)$$

它们有正交性(注意 $\gamma_5^2=1$)

$$P_LP_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\cdot\frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1-\gamma_5^2}{4} = 0$$

单幂性

$$P_LP_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\cdot\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+2\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = P_L$$

$$P_RP_R = P_R$$

完备性

$$P_L + P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} = 1$$

定义手征旋量场(Chirality spinor field)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{左旋态} \quad \psi_L = P_L\psi = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \\
&\text{右旋态} \quad \psi_R = P_R\psi = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi
\end{aligned}\right\} \qquad (13.4-5)$$

显然 $$\psi_L + \psi_R = \psi, \quad \gamma_5\psi_L = \psi_L, \quad \gamma_5\psi_R = -\psi_R \qquad (13.4-6)$$

定义涡度算符

$$P_H = \frac{\Sigma \cdot p}{|p|}, \qquad P_H^2 = 1$$

以 β 左乘(13.4—3)得

$$\beta(\gamma^0 E - \gamma \cdot p - m)\psi = 0$$

即

$$\beta\gamma \cdot p\psi = (E - \beta m)\psi$$

用(13.4—2)第四式，将上式改写成

$$\gamma_5 \Sigma \cdot p\psi = (-E + \beta m)\psi$$

用 γ_5左乘上式两边得

$$\Sigma \cdot p(\psi + \psi_R) = (-E - \beta m)(\psi_L - \psi_R)$$

利用(13.4—2)第二式可将前式写成

$$\Sigma \cdot p(\psi_L - \psi_R) = (-E + \beta m)(\psi_L + \psi_R)$$

联立解上面两式得

$$\Sigma \cdot p\psi_L = - E\psi_L + m\beta\psi_R$$

$$\Sigma \cdot p\psi_R = E\psi_R - m\beta\psi_L$$

当 $m=0$时得

$$\Sigma \cdot p\psi_L = - E\psi_L$$

$$\Sigma \cdot p\psi_R = E\psi_R$$

这时，ψ_L 和 ψ_R 分别是涡度算符的本征值为 -1，$+1$ 的本征态。这就是 ψ_L，ψ_R 分别称为左旋态和右旋态的来历。但由于在一般情况($m \neq 0$)，ψ_L，ψ_R 不是涡度算符 P_H 的本征态，故这一命名不完全确切。

2. 费米 V—A 弱作用理论

费米等人首先提出，弱相互作用是一种四费米子直接相互作用，其相互作用 Lagrangian 具有如下形式

$$\mathscr{L}_W \sim \bar{\psi}_a \Gamma \psi_b \cdot \bar{\psi}_c \Gamma' \psi_d$$

其中 Γ 是由狄拉克矩阵构成。

后来，经过长期对实验进行分析研究，认为弱作用有如下形式

$$-\mathscr{L}_W = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^\mu \qquad (13.4-7)$$

其中 $J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l + g_0\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d + g_1\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s$

$$(13.4-8)$$

这里，用粒子符号代表相应的场，即 ν, l 表示轻子场 d, s 表示夸克场。由于 $\bar{\psi}\gamma_\mu$ 和 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 分别是协变矢量（用 V 表示）和赝矢量（用 A 表示）故称为 V—A 弱作用理论，这种 V—A 理论是流—流直接相互作用理论。以后将看到，在规范理论里，弱作用是流（费米子流）—场（规范场）相互作用，即 $\mathscr{L}_W \sim J_\mu \cdot W_\mu, W_\mu$ 是规范场。

3. **轻子弱作用**

对于轻子弱作用，(13.4—8)简化成

$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l = \nu^+\gamma_0\gamma_\mu(1+\gamma_5)l \qquad (13.4-9)$$

利用手征算符的单幂性 γ_5 与 γ_0 的反对易性以及 γ_5 的厄米性，有

$$\gamma_0\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2} = \gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\cdot\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma_5}{2}\gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}$$

又
$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \bar{\psi}_L = \psi_L^+\gamma_0 = \psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma_0$$

利用这些关系，可将(13.4—9)写成

$$J_\mu = 2J_{\mu L} \qquad (13.4-10)$$

$$J_{\mu L} = \bar{\nu}_L\gamma_\mu l_L \qquad (13.4-11)$$

故弱作用流是左手流（左手场的流），而电磁作用流

$$J_\mu^{em} = -\bar{l}\gamma_\mu l$$

有右手场也有左手场。

我们可以进一步改写(13.4—10)令

$$L = \begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix}$$

为同位旋空间的二重态，取同位旋算符

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(13.4—10)可写成

$$J_{L\mu} = \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau_1 + i\tau_2}{2}L \qquad (13.4-11)$$

为进一步作理论上的推广，引进同位旋流

$$J_{L\mu} = \bar{L}\gamma_\mu \frac{\tau}{2} L$$

于是(13.4－11)写成

$$J_{L\mu} = J^1_{L\mu} + iJ^2_{L\mu}$$

将上式代入(13.4－10)，再代入(5.4－7)得

$$-\mathscr{L}_W = 2\sqrt{2}G(J^1_{L\mu}J^{1\mu}_L + J^2_{L\mu}J^{2\mu}_L) \quad (13.4-12)$$

上式只对绕同位旋第三轴的转动

$$L \to L' = exp[-i\theta_3 \frac{\tau_3}{2}]L$$

不变。为使对任意的同位旋转动

$$L \to L' = exp[-i\theta_i \frac{\tau_i}{2}]L \quad (13.4-13)$$

不变，应加上

$$J^3_{L\mu} = \bar{L}\gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} L$$

的平方项，使成为

$$-\mathscr{L}_W = 2\sqrt{2}J_{L\mu}\cdot J^\mu_L \quad (13.4-14)$$

上式对同位旋空间的任意转动保持不变。的确，在无穷小变换下

$$L' = (1 - i\theta_i \frac{\tau_i}{2})L$$

$$\bar{L}' = \bar{L}(1 + i\theta_i \frac{\tau_i}{2})$$

$$\bar{L}' \frac{\tau_j}{2} L' = \bar{L}(1 + i\theta_i \frac{\tau_i}{2}) \frac{\tau_j}{2}(1 - i\theta_i \frac{\tau_i}{2})L$$

$$= \bar{L}(\frac{\tau_j}{2} + i\theta_i[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}])L = (\delta_{jk} - \theta_i\varepsilon_{ijk})\bar{L}\frac{\tau_k}{2}L$$

$$\bar{L}' \frac{\tau}{2} L' \cdot \bar{L}' \frac{\tau}{2} L' = (\delta_{jk} + \theta_i\delta_{jki})(\delta_{jk'} + \theta_i'\varepsilon_{jk'i'})\bar{L}\frac{\tau_k}{2}L\bar{L}\frac{\tau_{k'}}{2}L$$

$$= (\delta_{kk'} + 2\theta_i\varepsilon_{ikk'})\bar{L}\frac{\tau_k}{2}L\bar{L}\frac{\tau_{k'}}{2}L = \bar{L}\frac{\tau}{2}L \cdot \bar{L}\frac{\tau}{2}L$$

所以(13.4－14)是对任意同位旋空间转动不变的，即同位旋守恒。

4. 轻子弱电作用统一规范理论

对弱作用和电磁作用特点有上面的了解之后，我们可以借助前面几节所阐明的方法，建立弱电统一规范理论。

(1)规范变换

上面已经看到，弱作用对如下规范变换

$$u_2(\theta) = \exp[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}]$$

不变($\boldsymbol{T}=\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$)，而电磁作用对以下规范变换

$$u_1(\theta) = \exp[-i\theta Q]$$

不变。由于这里的场量 ν, l 带不同电荷，不是 Q 的本征态，所以选超荷 Y 代替 Q，上式改写成

$$u_1(\theta) = \exp[-i\theta\frac{Y}{2}]$$

其中
$$\frac{Y}{2} = \theta - T_3 \qquad (13.4-15)$$

联合 u_1和 u_2，弱电统一的规范不变的变换应是

$$u(\theta)\exp[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T} - i\theta\frac{Y}{2}] \qquad (13.4-16)$$

(2)规范场

为使理论对定域规范变换保持不变，必须引进规范场。由于 $\boldsymbol{T}$ 有三个分量，故相应于三个规范场 $A_\mu^i(x)(i=1,2,3)$；$\frac{Y}{2}$ 对应一个规范场 $B_\mu(x)$。像以前一样对应的规范场强分别为：

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu + g\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu \qquad (13.4-17)$$

和
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

规范场的自由 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}g = -\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \qquad (13.4-18)$$

像以前一样，在规范变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{T}\rightarrow\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{T} &= \exp[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}]\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{T}\exp[i\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{T}]\\ &\quad+\frac{i}{g}\exp[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}]\partial_\mu\exp[i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}]\\ B_\mu\rightarrow B'_\mu &= B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\theta\end{aligned}$$

下，自由规范场的 Lagrangian $\mathscr{L}g$ 是不变的。

(3)轻子场

前面已经看到，对弱作用，轻子只有左手场，中微子没有质量，也只有左手场；对电磁作用，轻子有左手场也有右手场，故可把轻子(包括中微子)场写成二重态和单态，即

$$L=\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}\quad 和 \quad l_R$$

在规范变换下，同位旋二重态，$T=\frac{\tau}{2}$，单态 $T=0$。对于超荷，二重态 L 取

$$\frac{Y}{2}=\theta-T_3=\begin{vmatrix}0\\ -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

单态 l_R 取

$$\frac{Y}{2}=\theta-T_3=-1-0=-1$$

将上述结果代入(13.4—16)，得到轻子场的规范变换

$$L\rightarrow L'=\exp[-i\theta\cdot\frac{\tau}{2}+i\frac{\theta}{2}]$$

$$l_R\rightarrow l'_R=e^{i\theta}l_R \qquad (13.4-19)$$

轻子场的 Lagrangian 为

$$\mathscr{L}_l=i\overline{L}\gamma_\mu\partial^\mu L+i\bar{l}_R\gamma_\mu\partial^\mu l_R$$

它在整体规范变换下是不变的，要求理论对于局域规范变换不变就要将导数 ∂_μ 改写成协变导数 D_μ，于是局域规范变换不变的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}_{l_g}=i\overline{L}(\gamma_\mu\partial^\mu-ig\frac{\tau}{2}\cdot\gamma_\mu A^\mu+ig'\frac{1}{2}\gamma_\mu B^\mu)L$$

$$+i\bar{l}_R(\gamma_\mu\partial^\mu+ig'\gamma_\mu B^\mu)l_R \qquad (13.4-20)$$

其中考虑到右手场只与 B_μ 的场有作用，而左手场与 A_μ 和 B_μ 场都有作用。另外，上式不包含轻子场的质量项(平方项)，是因为轻子包括了没有质量的中微子，而有质量的轻子(如电子等)可通过 Higgs 机制获得质量。

(4)Higgs 场

为使部分轻子场和部分规范场获得质量，必须引进 Higgs 场，并利用 Higgs 机制。

在我们的理论中有四个规范场 A_μ 和 B_μ，而参与弱相互作用的粒子中，光子(对应电磁场)没有质量，三个中间玻色子都有质量，故 Higgs 场至少要有四个分量，才能使4—1＝3个规范粒子获得质量。我们选取一个带正电($Q=1$)的复数场(共二个实分量)和一个中性的复数场(也有二个实分量)共有 4 个实分量，让它像左手轻子场一样组成二重态，表示为

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{vmatrix} \qquad (13.4-21)$$

这时 $$\frac{Y}{2} = \theta - T_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

所以 Higgs 场的规范变换是

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = exp[-i\theta \cdot T - i\frac{\theta}{2}] \qquad (13.4-22)$$

其自由场 的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}_\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{2}\bar{\varphi}\varphi - \frac{\lambda}{4}(\bar{\varphi}\varphi)^2$$

为使它的 Lagrangian 具有定局规范变换不变性，必须做如下变换。

$$\partial_\mu \to D_\mu = (\partial_\mu - ig\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu - ig'\frac{1}{2}B_\mu)$$

它的规范不变的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\overline{D_\mu\varphi}\cdot D^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{2}\bar{\varphi}\varphi - \frac{\lambda}{4}(\bar{\varphi}\varphi)^2$$

$$= \frac{1}{2}|\bar{\varphi}^+\ \bar{\varphi}^0|(\overleftarrow{\partial_\mu} + \frac{i}{2}g\tau\cdot A_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu)$$

$$\cdot(\partial^\mu - \frac{i}{2}g\tau\cdot A^\mu - \frac{i}{2}g'B^\mu)\begin{vmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\mu^2}{2}|\bar{\varphi}^+\ \bar{\varphi}^0|\begin{vmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{vmatrix}-\frac{\lambda}{4}(|\bar{\varphi}+\bar{\varphi}^0|\quad\begin{vmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{vmatrix})^{|2|}$$

(13.4 − 23)

为了避免混淆，我们用一表示厄米共轭。

Higgs 场的真空值为

$$<|\sqrt{\bar{\varphi}\varphi}|>_0=v=\sqrt{\frac{-\mu^2}{2}}$$

我们选取真空态为

$$\varphi_0=\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}$$

对于规范变换 $u(\theta)=\exp(-i\theta\cdot T-i\theta\frac{1}{2})$，显然，这是一个破缺对称的真空，它对

$$T_1=\frac{\tau_1}{2},\quad T_2=\frac{\tau_2}{2},\quad T_3-\frac{Y}{2}=\frac{\tau_3-Y}{2}$$

是不对称的，因为

$$\tau_1\varphi_0=\begin{vmatrix}0&1\\ 1&0\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v\\ 0\end{vmatrix}\neq 0$$

故在 T_1无穷小转动变换（$\exp[-i\theta_1,\frac{\tau_1}{2}]=1-i\theta\frac{\tau_1}{2}$）下，

$$\varphi_0\to\varphi'_0=(1-i\theta_1\frac{\tau_1}{2})\varphi_0=\varphi_0-i\theta_1\frac{\tau_1}{2}\varphi_0\neq\varphi_0$$

同理

$$\tau_2\theta_0=\begin{vmatrix}0&-i\\ i&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-iv\\ 0\end{vmatrix}\neq 0$$

$$(\tau_3-Y)\varphi_0=\begin{vmatrix}0&0\\ 0&-2\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ -2v\end{vmatrix}\neq 0$$

故对对应的规范变换，真空态也是不对称的。但因为

$$(\frac{\tau_3+Y}{2})\varphi_0=\begin{vmatrix}1&0\\ 0&0\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}=0$$

故对对应的规范变换，真空态是对称的，注意到 $Q=\frac{\tau_3+Y}{2}$，这就

表示电荷是守恒量，而超荷Y不是守恒量。

(5)参数化和幺正规范

像以前所讨论的一样，要用参数化方法引进新场ξ和η，使Higgs场的真空对称。但这必带来自旋为零的Goldstone粒子。为消除Goldstone粒子，我们又要进行幺正规范。

对Higgs场进行参数化得

$$\varphi(x)=\exp[i\xi_1(x)\frac{\tau_1}{2}+i\xi_2(x)\frac{\tau_2}{2}+i\xi_3(x)\frac{\tau_3-1}{2}]\begin{vmatrix}0\\v+\eta\end{vmatrix}$$

再进行幺正规范得

$$\varphi'(x)=\exp[-i\xi_1(x)\frac{\tau_1}{2}-i\xi_2(x)\frac{\tau_2}{2}-i\xi_3(x)\frac{\tau_3-1}{2}]\varphi(x)$$

$$=\begin{vmatrix}0\\v+\eta\end{vmatrix}$$

当然，对规范场和轻子场也要进行以$\xi_1(x)$、$\xi_2(x)$、$\xi_3(x)$为参数，以T_1、T_2、$T_3-\frac{Y}{2}$为生成元的幺正规范变换。根据Lagragian的规范不变性质，把变换后的场代替变换前的场就得到新的Lagrangian，即对Higgs场，用

$$\varphi(x)\rightarrow\begin{vmatrix}0\\v+\eta(x)\end{vmatrix}\qquad(13.4-24)$$

作代换，对其它场，可不必改写，只要理解为幺正规范变换后的场就可以了。对(13.4—23)作(13.4—24)的代换得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\varphi}=&\frac{1}{2}|0\quad v+\eta|(\overleftarrow{\partial}_\mu+\frac{i}{2}g\tau\cdot A_\mu+\frac{i}{2}g'B_\mu)\\&\cdot(\partial^\mu-\frac{i}{2}g\tau\cdot A^\mu-\frac{i}{2}g'B^\mu)\begin{vmatrix}0\\v+\eta\end{vmatrix}\\&-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2-\frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4\\=&\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta+\mu^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4\\&-\frac{g^2}{8}(v+\eta)^2(A'_\mu-iA^2_\mu)(A'^\mu+iA^{2\mu})\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8}(v+\eta)^2(g'\beta_\mu - gA_\mu^3)^2 \qquad (13.4-25)$$

(6)规范场的质量

$A_\mu(x)$ 和 $B_\mu(x)$都是实数场，只能描述中性粒子。人们推测传递弱作用的中间玻色子是有电荷的，应用复数场来描述。因此，定义

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2), \quad Z_\mu = \frac{1}{(g^2+g'^2)^{1/2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu) \qquad (13.4-26)$$

将它们代入(13.4－25)得

$$\mathscr{L}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{g^2}{4}(v+\eta)^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$$

$$-\frac{g^2+g'^2}{8}(v+\eta)^2 Z_\mu Z^\mu \qquad (13.4-27)$$

可见，η、$W^\pm$、Z_μ 都是质量的本征态，由它们的平方项决定它们的质量，分别为：

Higgs 场 η 的质量 $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$,

荷电的弱作用规范场 $W^\pm$ 的质量 $m_W = \frac{1}{2}gv$,

中性弱作用规范场 Z 的质量 $m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}v$

可见通过 Higgs 机制使由(13.4－26)定义的三个规范场获得了质量。另一个没有质量的规范场即光子场可通过下面方法确定：定义温柏格角 θ_W 为

$$\mathrm{tg}\theta_W = \frac{g'}{g}, \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

代入(13.4－26)得

$$Z_\mu = A_\mu^3\cos\theta_W - B_\mu\sin\theta_W$$

这是一个正交变换的形式，光子场 A_μ 应是另一个正交变换后的场，它可由下式求得

$$\begin{vmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{vmatrix}$$

$$A_\mu = A_\mu^3 \sin\theta_W + B_\mu \cos\theta_W = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g' A_\mu^3 + gB_\mu)$$

(13.4 − 28)

这就是光子场的表示式。

(7)轻子场的质量

由于轻子包括电子、μ子、τ子和它们相应的中微子，中微子没有质量，故在轻子场的 Lagrangian 中不包含质量项。但通过 Higgs 机制，同样可使一些轻子场获得质量。我们设想轻子场和 Higgs 场的相互作用 Lagrangian 有汤川(Yukawa)耦合的方式(每项包含一个玻色子和二个费米子)

$$\mathscr{L}_{l\varphi} = - G_l(\bar{L}\varphi l_R + \bar{l}_R\bar{\varphi}L)$$

$$= - G_l(|\overline{\nu_L}\,\overline{l_L}| \begin{vmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{vmatrix} l_R + \bar{l}_R|\overline{\varphi}^+\ \overline{\varphi}^0| \begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix} \quad (13.4-29)$$

然后对 Higgs 场作参数化和幺正范变换，即做(13.4−24)的变换后得到

$$\mathscr{L}_{l\varphi} = - G_l(|\bar{\nu}_L\bar{l}_L| \begin{vmatrix} 0 \\ v + \eta \end{vmatrix} l_R + \bar{l}_R|0\ v + \eta| \begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix})$$

$$= - G_l[(v + \eta)\bar{l}_L l_R + (v + \eta)\bar{l}_R l_L]$$

利用 $$\bar{l}_L l_R = l_L^+ \gamma_0 l_R = l^+ \frac{1 + \gamma^5}{2}\gamma_0 \frac{1 - \gamma_5}{2} l$$

$$= l^+ \gamma_0 (\frac{1 - \gamma_5}{2})^2 l_R = \bar{l}\,\frac{1 - \gamma_5}{2} l$$

$$\bar{l}_R l_L = l_R^+ \gamma_0 l_L = l^+ \frac{1 - \gamma_5}{2}\gamma_0 \frac{1 + \gamma_5}{2} l = \bar{l}\,\frac{1 + \gamma^5}{2} l$$

$$\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L = \bar{l} l$$

所以 $$\mathscr{L}_{l\varphi} = - G_l(v + \eta)\bar{l}l \quad (13.4-30)$$

上式表明轻子的质量是 $m_l = G_l v$

(8)中性弱作用流

从(13.4−20)的 $\mathscr{L}_l$ 我们可找出轻子和规范场的相互作用项为

$$\mathscr{L}_{li}=\bar{L}(\frac{g}{2}\gamma^{\mu}\tau\cdot A_{\mu}-\frac{g'}{2}\gamma^{\mu}B_{\mu})L-g'\bar{l}_R\gamma^{\mu}B_{\mu}l_R$$

$$=|\bar{\nu}_L-\bar{l}_L|\frac{\gamma^{\mu}}{2}\begin{vmatrix}gA_{\mu}^3-g'B_{\mu} & g(A'_{\mu}-iA_{\mu}^2)\\ g(A'_{\mu}+iA_{\mu}^2) & -gA_{\mu}^3-g'B_{\mu}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}$$

$$-g'\bar{l}_R\gamma^{\mu}l_RB_{\mu} \qquad (13.4-31)$$

利用 $W^{\pm},Z^{\mu},A_{\mu}$ 的表示式(13.4—26)、(13.4—28)可将上式写成

$$\mathscr{L}_{li}=|\bar{\nu}_L\bar{l}_L|\frac{\gamma^{\mu}}{2}\begin{vmatrix}\sqrt{g^2+g'^2}Z_{\mu} & \sqrt{2}gW_{\mu}^{+}\\ \sqrt{2}gW_{\mu}^{-} & \frac{-2gg'}{\sqrt{g^2g'^2}}A_{\mu}+\frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_{\mu}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}$$

$$-l_R\gamma^{\mu}l_R(\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_{\mu}-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_{\mu})$$

$$=\frac{g}{\sqrt{2}}(W_{\mu}^{+}\bar{\nu}_L\gamma^{\mu}l_L+W_{\mu}^{-}\bar{l}_L\gamma^{\mu}\nu_L)$$

$$+\sqrt{g^2+g'^2}Z_{\mu}(\frac{\bar{\nu}_L\gamma^{\mu}\nu_L-\bar{l}_L\gamma^{\mu}l_L}{2}+\sin^2\theta_W\bar{l}\gamma^{\mu}l)$$

$$-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_{\mu}\bar{l}\gamma^{\mu}l$$

$$=\frac{g}{2\sqrt{2}}(W_{\mu}^{+}\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)l+W_{\mu}^{-}\bar{l}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\nu)$$

$$+\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}Z_{\mu}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\nu+\bar{l}\gamma^{\mu}(4\sin\theta_W-1-\gamma_5)l]$$

$$-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_{\mu}\bar{l}\gamma^{\mu}l \qquad (13.4-32)$$

可见除了包含与 $W_{\mu}^{\pm}$ 有关的带电弱流项和与 A_{μ} 有关的电磁流项外，还包含有与 Z_{μ} 有关的中性弱流项。可用费曼图表示(图13—3)。

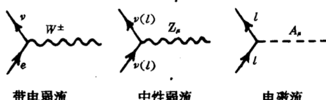
中性弱流作用是 GWS 模型的特点，实验上很难发现中性弱流，模型提出后做了很多实验检验，结果与理论一致。

综上所述，在轻子弱电统一规范理论中，系统用如下的 Lagrangian 来描述

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_{lg}+\mathscr{L}_{\varphi g}+\mathscr{L}_{l\varphi}$$

其中规范场的 Lagrangian 是(13.4—18)

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$



带电弱流　　中性弱流　　电磁流

图　13—3

规范不变的轻子场的 Lagrangian 是(13.4—20)

$$\mathscr{L}_{lg} = i\overline{L}(\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - ig\frac{\tau}{2}\cdot\gamma^\mu A_\mu + ig'\ \frac{1}{2}\gamma^\mu B_\mu)L$$

$$+\ \bar{l}_R(\gamma^\mu\partial_\mu + ig'\ \gamma^\mu B_\mu)l_R$$

规范不变的 Higgs 场的 Lagrangian 是(13.4—23)

$$\mathscr{L}_{\varphi g} = \frac{1}{2}\overline{\varphi}(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{2}g\tau\cdot A_\mu + \frac{i}{2}g'\ B_\mu)$$

$$\cdot\ (\partial_\mu - \frac{i}{2}g\tau\cdot A_\mu - \frac{i}{2}g'\ B_\mu)\varphi$$

$$-\ \frac{\mu^2}{2}\overline{\varphi}\varphi - \frac{\lambda}{4}(\overline{\varphi}\varphi)^2$$

其中

$$\varphi = \begin{vmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{vmatrix}$$

规范不变的轻子场和 *Higgs* 场相互作用的 *Lagrangian* 是(13.4—29)

$$\mathscr{L}_{l\varphi} = -\ G_l(\overline{L}\varphi l_R + \overline{l}_R\overline{\varphi}L)$$

对于夸克(quark)场弱电统一规范理论,也可用上述方法获得(把式中的轻子用夸克代替)。

附录 I　粒子简表

类别	粒子	符号	$m(\mathrm{MeV}/c^2)$	Q	J^P	I	I_3	$\tau(S)$	反粒子
规范粒子	光子	γ	$0(<6\times10^{-22})$	0	1^-	0, 1	0	稳定	γ
	中间玻色子	$W^\pm$	80800	±1	1			$\Gamma<7\mathrm{GeV}$	
		Z^0	92900	0	1			$\Gamma<8.5\mathrm{GeV}$	
	胶子	g	0	0	1			稳定	
轻子	中微子	ν_e	$0(<0.00006)$	0	$\frac{1}{2}$			稳定	$\bar{\nu}_e$
		ν_μ	$0(<0.57)$	0	$\frac{1}{2}$			稳定	$\bar{\nu}_\mu$
		ν_τ	0(164)	0	$\frac{1}{2}$			稳定	$\bar{\nu}_\tau$
	电子	e^-	0.5110034	-1	$\frac{1}{2}$			稳定	e^+
	μ子	μ^-	105.65946	-1	$\frac{1}{2}$			2.197120×10^{-6}	μ^+
	重轻子	τ^-	1784	-1	$\frac{1}{2}$			$<2.3\times10^{-12}$	τ^+
介子	π介子	$\pi^\pm$	139.5669	±1	0^-	$+1$	±1	2.6030×10^{-8}	$\pi^\pm$
		π^0	134.9626	0	0^-		0	0.828×10^{-16}	π^0
	η介子	η	548.8	0	0^-	0	0	$\Gamma=0.85\mathrm{KeV}$	η
	K介子	$K^\pm$	493.669	±1	0^-	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	1.2371×10^{-8}	$K^\mp$
		$K^0\bar{K}^0$	497.67	0	0^-		$\mp\frac{1}{2}$	$50\%K^0_S50\%K^0_L$	$\bar{K}^0$、K^0
		K^0_S						0.8923×10^{-10}	
		K^0_L						5.183×10^{-8}	

续表

类别	子粒	符号	$m(\mathrm{MeV}/c^2)$	Q	J^P	I	I_3	$\tau(S)$	反粒子
介子	新粒子	$D^{\pm}$	1868.3	±1	0^-	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	2.5×10^{-13}	$D^{\mp}$
		$D^0\bar{D}^0$	1863.1	0	0^-		$\mp\frac{1}{2}$	3.5×10^{-13}	$\bar{D}^0D^0$
		J/ψ	3097	0	1^-	0	0	$\Gamma=67\pm12\mathrm{KeV}$	
		Υ	～9500	0	1^-	0	0		
重子	核子	p	938.2796	+1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	稳定($>10^{30}y$)	$\bar{p}$
		n	939.5731	0	$\frac{1}{2}^+$		$-\frac{1}{2}$	917	$\bar{n}$
	Λ超子	Λ	1115.60	0	$\frac{1}{2}^+$	0	0	2.632×10^{-10}	Λ
重子	Σ超子	Σ^+	1189.36	+1	$\frac{1}{2}^+$	1	+1	0.800×10^{-10}	$\bar{\Sigma}^+$
		Σ^0	1192.46	0	$\frac{1}{2}^+$		0	5.8×10^{-20}	$\bar{\Sigma}^0$
		Σ^-	1197.34	−1	$\frac{1}{2}^+$		−1	1.482×10^{-10}	$\bar{\Sigma}^-$
	Ξ超子	Ξ^0	1314.9	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	2.90×10^{-10}	$\bar{\Xi}^0$
		Ξ^-	1321.32	−1	$\frac{1}{2}^+$		$-\frac{1}{2}$	1.641×10^{-10}	$\bar{\Xi}^+$
	Ω超子	Ω^-	1672.22	−1	$\frac{3}{2}^+$	0	0	0.82×10^{-10}	Ω^+
	Λ_c超子	Λ_c^+	2273	+1	$\frac{1}{2}^+$	0	0	$\sim7\times10^{-13}$	Λ_c^-

附录Ⅱ δ函数

1. δ函数的引进

δ函数是 Dirac 根据物理上的需要而并首先提出的，所以又称为 Dirac δ函数。

设有质量为1、长度为 l、密度均匀的细杆，则其密度(图Ⅱ—1)

$$\rho_l(x)=\begin{cases}1/l & |x|\leqslant l/2\\ 0 & |x|>l/2\end{cases}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2}\rho_l(x)dx=1$$

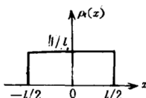


图 Ⅰ—1

令 $l\to 0$(缩成一点)，质量保持不变，记为：

$$\lim_{l\to 0}\rho_l(x)=\delta(x)$$

则有

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

和

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

其中区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$包含 $x=0$点。上式又可看做δ函数的定义，它具有奇异的性质：在 $x=0$点附近的小范围内数值为无穷大，而其余处处为零。它描述的分布是一种理想的点模型分布，在物理应用方面是十分广泛的。如果不十分追求数学上的严格性，它将等于一个非奇异函数的某种极限。

2. δ函数的几种表示

δ函数常可表示成一个非奇异函数的极限。

(1)
$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-x^2/2\alpha}=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a} \mathrm{d}x = 1$$

(2) $$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \to 0} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(3) $$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \to 0} \frac{\sin ax}{x}$$

(4) $$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \to 0} \frac{\sin^2 ax}{x^2}$$

(5) $$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \theta(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(6) $$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} \mathrm{d}k$$

容易证明(1)—(4)满足 δ 函数定义的性质。下面证明(5)、(6)式也满足 δ 函数的性质。

阶梯函数 $\theta(x)$（图 I —2）在 $x=0$ 处，斜率 $=\infty$，而在 $x \neq 0$ 处斜率 $=0$，故有

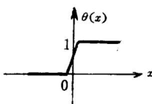


图 I —2

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x) = \begin{cases} \infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

而且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \theta(0^+) - \theta(0^-) = 1$$

所以阶梯函数的微商是一个 δ 函数。对于式(6)可改写成

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2\pi} \Big[\int_0^{\infty} e^{ikx - ak} \mathrm{d}k + \int_0^{\infty} e^{-ikx - ak} \mathrm{d}k \Big]$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{2\pi} \Big[\frac{1}{a - ix} + \frac{1}{a + ix} \Big] = \frac{1}{\pi} \lim_{a \to 0} \frac{1}{a^2 + x^2}$$

这就是式(2)。所以

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}k$$

上式可推广至三维和四维的情况，即

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\cdot x}\,\mathrm{d}^3x$$

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_\mu x_\mu}\mathrm{d}^4k \qquad \mu = 1,2,3,4$$

3. δ 函数的性质

(1) δ 函数是偶函数 $\quad \delta(x) = \delta(-x)$

证：$\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(-x)\mathrm{d}x = -\int_{\varepsilon}^{-\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x = 1$

于是 $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[\delta(-x) - \delta(x)]\mathrm{d}x = 0$

$\delta(-x)$ 和 $\delta(x)$ 除 $x = 0$ 点外均为零，故 $\delta(-x) = \delta(x)$。

由 $\delta(x)$ 为偶函数，还可得到

$$\int_{0}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

利用(1)式有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\mathrm{d}(|a|x) = \frac{1}{|a|}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$

$$左边 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

类似地有

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\delta(x-b)\mathrm{d}x = \delta(a-b)$$

(5) $x\delta(x) = 0$

(6) $\displaystyle\delta[\varphi(x)] = \sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{\varphi'(x_i)} = \sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{\varphi'(x)}$

其中 x_i 是 $\varphi(x) = 0$ 的根(设 $\varphi(x)$ 只有单根)。

证：在 x_i 附近取积分

$$F_i = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]\mathrm{d}x$$

令 $u = \varphi(x)$，则 $du = \varphi'(x)\mathrm{d}x$

于是

$$F_i = \int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} f(x)\delta(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{|\varphi'(x)|}$$

$$= \int_{-\varepsilon|\varphi'(x_i)|}^{\varepsilon|\varphi'(x_i)|} f(x)\delta(u)\,\frac{du}{|\varphi'(x)|} = \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$$

故对各 x_i 附近积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]\mathrm{d}x = \sum_i \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sum_i\left[\frac{\delta(x-x_i)}{\varphi'(x_i)}\right]\mathrm{d}x$$

所以

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$$

例1 $\varphi(x) = (x-a)(x-b)$ 单根 $x_1 = a, x_2 = b \quad (a \neq b)$，故有

$$\delta[(x-a)(x-b)] = \frac{1}{|a-b|}[\delta(x-a)\delta(x-b)]$$

例2 $\varphi(x) = x^2 - a^2$

$$\delta(x^2-a^2) = \delta[(x+a)(x-b)] = \frac{1}{2|a|}[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$$

$$= \frac{1}{2|x|}[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$$

当 $a=0$ 时有

$$|x|\delta(x^2) = \delta(x)$$

4. δ 函数的导数

奇异的 δ 函数的微商，可用非奇异函数的极限来表示。

设 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 连续（或分段连续），$\delta(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\rho_\alpha(x)$，$\rho_\alpha(x)$ 是个连续函数

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\mathrm{d}x_0$$

$$=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_a(x-x_0)\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x_0}\mathrm{d}x_0$$

分部积分得

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=-\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0}\rho_a(x-x_0)\mathrm{d}x_0$$

$$=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0)\frac{\partial}{\partial x}\rho_a(x-x_0)\mathrm{d}x_0$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x_0$$

所以 $$\int\frac{\partial}{\partial x_0}\delta(x_0-x)\cdot f(x_0)\mathrm{d}x_0=(-1)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

类似有 $$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^n}{\partial x_0^n}\delta(x_0-x)\right]f(x_0)\mathrm{d}x_0=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

并且有 $$\delta'(x)=-\delta'(-x)$$

$$\delta^{(n)}(x)=(-1)^n\delta^{(n)}(-x)$$

附录Ⅲ 维克(Wick)定理

在量子场论的微扰计算中,借助 Wick 定理将混合乘积(正规乘积的编时乘积)化简为正规乘积是很方便的。

1. Wick 第一定理

m 个算符的编时乘积(T 乘积)可以唯一地展开成含有各种可能的收缩因子的正规乘积(N 乘积)之和,其中包括不含收缩因子的零个收缩因子的正规乘积。可用数学式子表达如下

$$
\begin{aligned}
T(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n) &= N(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n) \\
&+ \underbracket{\varphi_1\varphi_2}N(\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n) + \text{排列项} \\
&+ \underbracket{\varphi_1\varphi_2}\underbracket{\varphi_3\varphi_4}N(\varphi_5\cdots\varphi_n) + \text{排列项} \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ \begin{cases} \underbracket{\varphi_1\varphi_2}\cdots\cdots\underbracket{\varphi_{n-1}\varphi_n} + \text{排列项} & n = \text{偶数} \\ \underbracket{\varphi_1\varphi_2}\cdots\cdots\underbracket{\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\varphi_n + \text{排列项} & n = \text{奇数} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

上式中各"排列项"是指$\{1,2,3,\cdots,n\}$的所有可能排列项,例如收缩因子 $\underbracket{\varphi_1\varphi_2}$应取任何可能的一对场算符。但把收缩因子同留下的 N 乘积隔离写开时,必须乘上一个因子$(-1)^P$,P 是将算符移到一起进行收缩时所需交换费米子算符的总次数。

我们用数学归纳法证明(1)式。

当 $n=1$时,上式显然成立;当 $n=2$时上式写成

$$
T(\varphi_1\varphi_2) = N(\varphi_1\varphi_2) + \underbracket{\varphi_1\varphi_2} \tag{2}
$$

这正是算符收缩的定义式,所以 $n=2$时,(1)式显然成立。设在 n 时,(1)式成立,证明 $n+1$时也成立。$n+1$个场算符的编时乘积

$$
T(\varphi_1\varphi_2\cdots,\varphi_n\varphi_{n+1})
$$

其中 $\qquad \varphi_i \equiv \varphi(x_i), i = 1,2,\cdots,n,n+1,$

设 $\qquad t_{n+1} < t_i, i = 1,2\cdots n$

按 T 乘积的作用是把作用时间最早的算符排列在最右边的规定,应有 $T(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n,\varphi_{n+1}) = T(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1}$

应用(1)式得到

$$T(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n,\varphi_{n+1}) = N(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1}$$
$$+ \underbrace{\varphi_1\varphi_2}N(\varphi_3\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1} + \text{排列项}$$
$$+ \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\underbrace{\varphi_3\varphi_4}N(\varphi_5\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1} + \text{排列项}$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ \begin{cases} \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\cdots\cdots\underbrace{\varphi_{n-1}\varphi_n}\varphi_{n+1} + \text{排列项} & n = \text{偶数} \\ \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\cdots\cdots\underbrace{\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\underbrace{\varphi_n\varphi_{n+1}} + \text{排列项} & n = \text{奇数} \end{cases} \tag{3}$$

上式中"排列项"的含义与前面相同，但不包括 $n+1$，即 φ_{n+1} 不参与排列交换。要使(3)式具有(1)形式，必须将 φ_{n+1} 放入各个 N 乘积中去。下面以(3)式中第一项为例来说明这个问题。根据 N 乘积的定义有

$$N(\varphi_1\cdots\varphi_n) = N[(\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)})\cdots\cdots(\varphi_n^{(+)} + \varphi_n^{(-)})]$$
$$= \sum_I \delta_I \prod_{j\not\subset I} \varphi_j^{(+)} \prod_{i\subset I} \varphi_i^{(-)} \tag{4}$$

其中 I 表示 $\{1,2\cdots\cdots n\}$ 中任一组可能排列项的指标，$i\subset I$ 表示 i 是 I 中的一个指标，$j\not\subset I$ 表示 j 是 I 以外的指标，$\delta_I = (-1)^{P_I}$，表示每一项相应的排列号标，P_I 是对应于该排列所需对调费米子算符的次数。以 φ_{n+1} 右乘上式两边得

$$N(\varphi_1\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1} = \sum_I \delta_I \prod_{j\not\subset I} \varphi_j^{(+)} \prod_{i\subset I} \varphi_i^{(-)} (\varphi_{n+1}^{(+)} + \varphi_{n+1}^{(-)}) \tag{5}$$

为了将上式右边写成 N 乘积，产生算符必须移至 $\prod_{i\subset I}\varphi_i^{(-)}$ 的左边。若 φ_{n+1} 和 φ_k $(k\subset I)$ 同是玻色子场算符，则

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_{n+1}^{(+)} = \varphi_{n+1}^{(+)}\varphi_k^{(-)} + [\varphi_k^{(-)},\varphi_{n+1}^{(+)}]$$

其中
$$[\varphi_k^{(-)},\varphi_{n+1}^{(+)}] = <0|[\varphi_k^{(-)},\varphi_{n+1}^{(+)}]|0>$$
$$= <0|\varphi_k^{(-)}\varphi_{n+1}^{(+)}|0> = <0|\varphi_k\varphi_{n+1}|0>$$
$$= <0|T(\varphi_k\varphi_{n+1})|0> = \underbrace{\varphi_k\varphi_{n+1}}$$

若 φ_{n+1} 和 φ_k 同是费米子算符，则

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_{n+1}^{(+)} = -\varphi_{n+1}^{(+)}\varphi_k^{(-)} + [\varphi_k^{(-)},\varphi_{n+1}^{(+)}]_+$$

其中
$$[\varphi_k^{(-)},\varphi_{n+1}^{(+)}]_+ = \underbrace{\varphi_k\varphi_{n+1}}$$

所以不论 φ_{n+1} 是玻色子，还是费米子场算符，(5)式都可写成

$$N(\varphi_1\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1} = \sum_I \delta_I \prod_{j\not\subset I} \varphi_j^{(+)}\varphi_{n+1}^{(+)} \prod_{i\subset I} \varphi_i^{(-)}$$

$$+\sum_I \delta''_I \prod_{j\not\subset I} \varphi_j^{(+)} \sum_{k\subset I} \prod_{i\subset I}{}' \varphi_i^{(-)} \underbrace{\varphi_k \varphi_{n+1}}$$

$$+\sum_I \delta'_I \prod_{j\not\subset I} \varphi_j^{(+)} \varphi_{n+1}^{(\mp)} \prod_{i\subset I} \varphi_i^{(-)} \tag{6}$$

其中 δ'_I、δ''_I是相应的新的排列号标 $\prod_{i\subset I}{}'$ 表示在 i 乘积中 $i\neq k$。上式中第一、三两项可合并成

$$N(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n\varphi_{n+1})$$

第二项可写成

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \underbrace{\varphi_k \varphi_{k+1}} N(\varphi_1\cdots\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}\cdots\varphi_n)$$

其中 δ_k 是将 $\varphi_1\cdots\varphi_{k-1}\varphi_k\varphi_{k+1}\cdots\varphi_n$ 调换成 $\varphi_1\cdots\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}\cdots\varphi_n\varphi_k$ 时的排列号标。于是(6)式写成

$$N(\varphi_1\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1} = N(\varphi_1\cdots\varphi_n\varphi_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \underbrace{\varphi_k \varphi_{n+1}} N(\varphi_1\cdots\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}\cdots\varphi_n) \tag{7}$$

应用(2)和(7)式，(3)式就是(1)式在 $n+1$时的形式了。于是证明了 Wick 第一定理。

2. Wick **第二定理**

将混合乘积变成正规乘积时，仍按 wick 第一定理的方法展开，只需将同一正规乘积内同时间的场算符的收缩除去。

为证明 Wick 第二定理，实际上只需证明同一正规乘积内同时间的两个场算符的收缩等于零即可。设 φ_1、φ_2是同一正规乘积内两个同时间的场算符，显然有

$$T[N(\varphi_1\varphi_2)] = N(\varphi_1\varphi_2)$$

另外有 $\quad N[N(\varphi_1\varphi_2)] = N_2(\varphi_1\varphi_2) = N(\varphi_1\varphi_1)$

按场算符收缩的定义，正规乘 $N(\varphi_1\varphi_2)$的收缩(不是收缩的正规乘积)写成

$$N(\underbrace{\varphi_1\varphi_2}) = T[N(\varphi_1\varphi_2)] - N[N(\varphi_1\varphi_2)] = N(\varphi_1\varphi_2) - N(\varphi_1\varphi_2) = 0$$

于是，Wick 第二定理得证。

附录Ⅳ　重整化方法中的积分计算

1. **费曼积分公式**(Feynman 1949)

(1)
$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}\frac{1}{F^n} \tag{1}$$

$$F=a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots a_n(1-x_1) \tag{2}$$

Feynman 图中,每条内电子线和每条内光子线分别对 S 矩阵元贡献因子

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{i\hat{P}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}\quad 和 \quad \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \tag{3}$$

它们都存在二个一级极点,用 a_i 表示上式分母,则利用公式(1)可将 $2n$ 个一级极点转换为两个 n 级极点,从而将极点集中,使积分简化。

(2)
$$\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}=-\int_0^1\frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}} \tag{4}$$

这个公式(4)可直接积分右边得到证实。

现在我们用数学归纳法来证明公式(1)。当 $n=1$ 时无须证明,当 $n=2$ 时(1)式为

$$\frac{1}{a_1a_2}=\int_0^1\frac{dx}{[a_1x+a_2(1-x)]^2} \tag{5}$$

这式的证明很简单,只要利用恒等式

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)=\frac{1}{(a_2-a_1)}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dz}{z^2}$$

及引进 $z=a_1x+a_2(1-x)$ 就可得到(5)式。为进一步讨论,先证明公式

$$\frac{1}{nA^nB} = \int_0^1 \frac{u_0^{n-1}du_0}{[Au_0 + B(1-u_0)]^{n+1}} \tag{6}$$

证：用 $\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}}\int \frac{(y-a)^n dy}{y^m} \quad (y = a+bx, x = \frac{y-a}{b})$

有
$$\int_0^1 \frac{u_0^{n-1}du_0}{[Au_0 + B(1-u_0)]^{n+1}} = \int_0^1 \frac{u_0^{n-1}du_0}{[B + (A-B)u_0]^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{(A-B)^n}\int_B^A \frac{(y-B)^{n-1}dy}{y^{n+1}}$$
$$= \frac{(-B)^{-1}}{(A-B)^n}\int_B^A \frac{[1+(\frac{y}{-B})]^{n-1}}{(\frac{y}{-B})^{n+1}} d(\frac{y}{-B})$$
$$= \frac{(-B)^{-1}}{(A-B)^n}\int_{-1}^{-\frac{A}{B}} - \frac{(1+x)^{n-1}}{x^{n+1}}dx,$$

其中令 $x = \frac{y}{-B}$

上式右边的分子用牛顿二项式展开，积分后再合并，最后上式右边 $= n\frac{1}{A^nB}$，于是(6)式得证。

为了证明 n 为任意的正整数，(1)式都成立，我们引进变换

$$x_1 = u_1, \qquad dx_1 = du_1$$
$$x_2 = u_1u_2, \qquad dx_2 = u_1du_2$$
$$\cdots\cdots, \cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = u_1u_2\cdots u_{n-1}, \qquad dx_{n-1} = u_1u_2\cdots du_{n-1}$$

则(4)可写为

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n} = (n-1)!\int_0^1 u_1^{n-2}du_1\int_0^1 u_2^{n-3}du_2\cdots$$
$$\cdots\int_0^1 du_{n-1}\frac{1}{[a_1u_1\cdots u_{n-1} + a_2u_1\cdots u_{n-2}(1-u_{n-1}) + \cdots + a_n(1-u_1)]^n} \tag{7}$$

假设(4)式对于 n 是成立的，可以证明(1)式对于 $(n+1)$ 也是成立的，因为用 $\frac{1}{a_{n+1}}$ 乘上式两边得

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}=(n-1)!\int_0^1 u_1^{n-2}du_1\cdots\int_0^1 du_{n-1}\frac{1}{A^n a_{n+1}}$$

其中 A 为(7)式中分母的括号内各项，利用(6)式代入上式右边被积函数（令 $B=a_{n+1}$），则上式变成

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}=n!\int_0^1 u_0^{n-1}\mathrm{d}u_0\int_0^1 u_1^{n-2}\mathrm{d}u_1\cdots\int_0^1\mathrm{d}u_{n-1}\frac{1}{[Au_0+a_{n+1}(1-u_0)]^{n+1}}$$

这实际上与(4)式一致，故得证。

2. **收敛积分**

应用公式(1)可以把典型的积分(3)的分母化成为

$$A=[(k-b)^2+a^2]^n\quad 或写成\quad A=[k^2-2kb+l]^n$$

其中 b 代表四维矢量，a 或 l 为一标量，均与 k 无关，但可能与辅助变量 x 有关。

为了下面讨论发散积分作好准备，我们首先考虑积分是否收敛的情况。假如我们将 k 空间的坐标作 $k_\mu\to k_\mu+b_\mu$ 的变换，则可使 A 变换为 $(k^2+a^2)^n$ 的形式，这样就可以利用对称性质来讨论积分的贡献，使得手续大为简化。例如，典型积分为收敛时最后归结为如下的形式：

$$I_{mn}=\int\frac{(k^2)^{m-2}\mathrm{d}^4k}{(k^2+a^2)^n}\tag{8}$$

以上我们考虑了，k_μ 为奇数方时，由于对称性的缘故，积分为零。

在(8)式中对 k_0 的积分有两个 n 级极点 $k_0=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+a^2}$，而积分 I 的被积函数来自中间态的传播函数，故按照第八章 §8.2 的规定，在复数 k_0平面上的积分路线应如图Ⅳ—1所示。

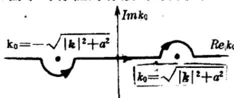


图 Ⅳ—1

我们可以把积分路线沿反时针方向转过90°，不经过极点，而使对 k_0的积分沿虚轴进行，因为这样得到的留数仍然和原来的一样，故积分的数值相同。于是原来的积分可写为

$$I_{mn}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\mathrm{d}k_0\frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}$$

令 $k_4 = ik_0$，则

$$I_{mn} = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k^2)^{m-2}\mathrm{d}^4k}{(k^2+a^2)^n}$$

注意在上式中的 $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$ 而不再是 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2$ 及 $\mathrm{d}k = \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}k_4$，此时在积分区域里不再有极点，可直接求四维空间的体积分。由于被积分函数只有(k^2)出现，故引用四维球极坐标较为方便。令

$$k_4 = K\cos\Phi, \qquad k_1 = K\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi$$

$$k_2 = K\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi, \quad k_3 = K\sin\Phi\cos\theta$$

$$k^2 = \boldsymbol{k}^2 + k_4^2 = K^2$$

$$\mathrm{d}^4k = |J|\mathrm{d}k\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\Phi = k^3\sin^2\Phi\sin\theta\mathrm{d}k\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

雅科比系数

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_4}{\partial K} & \frac{\partial k_4}{\partial \Phi} & \frac{\partial k_4}{\partial \theta} & \frac{\partial k_4}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial k_3}{\partial K} & \cdots & \cdots & \frac{\partial k_3}{\partial \varphi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial k_1}{\partial K} & \cdots & \cdots & \frac{\partial k_1}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = K^3\sin^2\Phi\sin\theta$$

积分限

$$K: 0 \to \infty, \quad \Phi: 0 \to \pi, \quad \theta: 0 \to \pi, \quad \varphi: 0 \to 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin^2\Phi\mathrm{d}\Phi\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi^2$$

对收敛积分，由(8)式知，要求 $n-m>0$。将上面关系式代入(9)式得

$$I_{mn} = i2\pi^2\int_0^\infty \frac{(K^2)^{m-2}}{(K^2+a^2)^n}K^3\mathrm{d}K$$

令 $t = K^2$，于是对 $n\geqslant 3$

$$I_{mn} = i\pi^2\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\mathrm{d}t}{(t+a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}B(m, n-m)$$

或写成

$$I_{mn}=\int\frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}\mathrm{d}^4k=\frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}\qquad(10)$$

其中 $\Gamma(n)=(n-1)!,\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$。

上二式中的 Γ 和 B 分别为 Gamma 和 Beta 函数。

3. 发散积分　移动积分原点

对收敛积分，移动积分原点，不改变积分值，即积分值对原点移动的变化 $\Delta I=0$。下面我们讨论发散积分，当积分原点移动时，积分值的改变。

(1)对数性发散积分

一般情况下，对数性发散积分，当原点移动时，积分值改变量 $\Delta I=$常数$\neq 0$，但若积分限为$(-\infty,\infty)$，则对数性发散积分 $\Delta I=0$。我们以特殊的对数性发散积分说明这一点：

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^4k}{[(k-b)^2+a^2]^2},\text{当 } k\to k+b,\Delta I_0=0\qquad(11)$$

证：设积分原点移动，使 $k\to k+b$ 相应积分值由 $I_0\to I_0'$，则

$$\Delta I_0=I_0-I'_0=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\Big[\frac{1}{[(k-b)^2+a^2]^2}-\frac{1}{(k^2+a^2)^2}\Big]$$

利用费曼公式(4)，$n=2,\alpha=(k-b)^2+a^2,\beta=k^2+a^2,\alpha-\beta=b^2-2k\cdot b$，于是(用了有限积分可交换积分顺序)

$$\Delta I_0=-2\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\frac{(b^2-2k\cdot b)\mathrm{d}z}{[k^2+a^2+(b^2-2k\cdot b)z]^3}$$

$$=-2\int_0^1\mathrm{d}z\int\mathrm{d}^4k\frac{b^2(1-2z)-2b\cdot k}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3}$$

由于积分对 k 具有对称性，故 k 的奇次项积分为零。用积分公式(10)得到

$$\int\mathrm{d}^4k\frac{b^2(1-2z)}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3}=\frac{1}{2}i\pi^2\frac{1}{a^2+b^2z(1-z)}$$

代入前式得到

$$\Delta I_0=-i\pi^2\int_0^1dz\frac{b^2(1-2z)}{a^2+b^2z(1-z)}=-i\pi^2\ln[a^2+b^2z(1-z)]\Big|_0^1$$

$$=0$$

(2)线性发散积分

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\mu \mathrm{d}^4k}{[(k-b)^2+a^2]^3},\quad 当\ k\to k+b\ 时\ \Delta I_1=-\frac{i\pi^2}{2}b_\mu \tag{12}$$

证：

$$\Delta I_1=I_1-I'_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_\mu \mathrm{d}^4k}{[(k-b)^2+a^2]^2}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k_\mu+b_\mu)\mathrm{d}^4k}{(k^2+a^2)^2}$$

$$=-b_\mu\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(k^2+a^2)^2}+\int \mathrm{d}^4k k_\mu\left[\frac{1}{[(k-b)^2+a^2]^2}-\frac{1}{(k^2+a^2)^2}\right]$$

第二个积分用费曼公式(4)，$n=2,\alpha=(k-b)^2+a^2,\beta=k^2+a^2$，$\alpha-\beta=b^2-2b\cdot k$，于是上式第二个积分等于

$$-2\int k_\mu \mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}z\frac{b^2-2b\cdot k}{[k^2+a^2+(b^2-2b\cdot k)z]^3}$$

$$=-2\int k_\mu \mathrm{d}^4k_\mu\int_0^1\mathrm{d}z\frac{b^2-2b\cdot k}{[(k-bz)^2+a^2+b^2z(1-z)]^3} \tag{13}$$

这个积分是对数性发散积分，移动积分原点不改交积分的数值，故作原点移动 $k_\mu\to k_\mu+b_\mu z$ 后，上式变成

$$-2\int(k_\mu+b_\mu z)\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}z\frac{b^2(1-2z)-2b\cdot k}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3} \tag{14}$$

上式中分母是 k^2的函数，故分子为 k 的奇次项由于积分子的对称性，可知为零。因而可以略去分子中含 k 的奇次项，再注意到由于积分对称性而导致的

$$\int \mathrm{d}^4k\frac{k_\mu^2}{(k^2+a^2)^n}=\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4k\frac{k^2}{(k^2+a^2)^n}$$

则有

$$\Delta I_1=-b_\mu\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(k^2+a^2)^2}+b_\mu\int k^2\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}z\frac{1}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3}$$

$$-2b_\mu\int \mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}z\frac{b^2z(1-2z)}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3} \tag{15}$$

上式第三个积分先对 z 分部积分得

$$2b_\mu\int_0^1\mathrm{d}z\frac{b^2z(1-2z)}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^3}=\int_0^1 z\mathrm{d}\frac{b_\mu}{[k^2+a^2+b^2z(1-z)]^2}$$

$$= b_\mu \frac{1}{(k^2 + a^2)^2} - b_\mu \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{[k^2 + a^2 + b^2 z(1-z)]^2}$$

代入(15)式得

$$\Delta I_1 = b_\mu \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \mathrm{d}z \left\{ \frac{k^2}{[k^2 + a^2 + b^2 z(1-z)]^3} - \frac{1}{[k^2 + a^2 + b^2 z(1-z)]^2} \right\}$$

$$= - b_\mu \int \mathrm{d}^4 k \int_0^1 \mathrm{d}z \frac{a^2 + b^2 z(1-z)}{[k^2 + a^2 + b^2 z(1-z)]^3}$$

这是一个收敛积分，利用(10)式，对 $\mathrm{d}^4 k$ 积分后得

$$\Delta I_1 = - i \frac{\pi^2}{2} b_\mu \int_0^1 \mathrm{d}z \frac{a^2 + b^2 z(1-z)}{a^2 + b^2 z(1-z)} = \frac{-i\pi^2}{2} b_\mu$$